RENATI

DES-CARTES

GEOMETRIÆ

PARS SECVNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

CATALOGVS

eorum,

Quæ in hâc secundâ parte continentur.

LECTORI BENEVOLO

I. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epiſtolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me ſuſcepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi conſtaret, num quædam nimis obſcurè expreſſa eſſent, vel etiam errata irrepſiſſent; Quæcunque inveni, illa ſunt quæ ſequuntur.

Ad clariorem ſenſum.

p.424 l. 15. *Excepto* &c. Cum $x - a \propto 0$, multiplicatur per $b - c$, reſultat $bx - cx - ab + ac \propto 0$, ſeu $x \propto \frac{ab - ac}{b - c}$; ſi ponas jam $b - c \propto 0$, non ſequitur valorem x per hanc æquationem non poſſe inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi poteſt, ſed tum ſequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi poteſt, vel cum ambo per eandem quantitatem indiviſibiles ſunt: Notandum ergo eſt Denominatorem hic conſiderari ſine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex ſequentibus, 1°. *Obſervandum venit num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant.* Sed hæc omnia fortaſſis clarius ſic intelligentur. Excepto tantum ſi æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita ſit ab una parte, reliqui, qui ab altera ſunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris diviſor aliquis, Nominatorem dividat, quod ſi contingat, videndum eſt, priuſquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem diviſorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominatorem, vel Denominatoris diviſorem aliquem, diviſibilis ſit. p. 459. l. 10. vel ſic lege, æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x, x^3, x^5, &c., 8, vel per xx, x^4, x^6, &c., $-$ quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates* pone omnia membra. p.492, l.13. pro *Regula*, ſcribe Methodo. p.451 & 456, l.1. lege, nullus terminus eſt $\propto 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ *extrahi poterit*; ſcribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$. & pro, *ſed cum* $\sqrt{C}$ *&c.*, uſque ad, *liceat &c.*; pone, ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p.389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod ſufficit, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex æquatione Propoſita ſive numerali, ſive literali ſit, inveniri, cum pro literis numeros, vel 0, ad arbitrium aſſumere liceat. p. 502, l.31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic ſumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Propoſita æquatio produci poteſt. Errata, quæ irrepſerunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas eſt me, non ſine admiratione, in Epiſtolis meis, quæ tam ſedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores oſtendiſſe, niſi cogitarem D. Elzevirios & Clariſſimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuiſſe, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impreſſum ſit, quam quis fortaſſis exſpectaſſet.

C A R M E N

IN LAUDEM

FR. à SCHOOTEN,

Mathematicorum ocelli.

SCotenI cum scripta legis, se promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores spectas, se præbet ubique
Spectandam integritas, ac sine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum sit superabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

Π Ε Ρ Ί
ΦΡΑΓΚΊΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗ΄ΝΟΥ,

τοῦ μακαρίτου,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Ὁδοιπόρου.

Μάθ. Τί κλαίεις; σφετέρους τί νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαύδα, καὶ μὴ κεῦθε νόῳ, Εὐσεβίη)
Ἠδ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἐέσσαο; χώματι τούτῳ
Ἤματα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη;
Εὐσ. Θυμήρης μοι υἱὸς ἀπώλετο, φέρτατος ἀνδρῶν,
Ὃς Σοφίην θείην μίξε ταπεινοσύνην.
Τὸν Βαταβῶν Λουγδουνὸν ἐγείνατο, τόν τε μαθητὴν
Δῶκά σοι ἐξ ἁπαλοῦ ἀγχίνοον βρέφεος.
Μ. Σκώτην; Ε. κεῖνος. Μ. Σκώτην; λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσείου γένεος, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτηνος; τὸν ἐμοῖσιν ἴσον φαέεσσι φίλησα,
Ἠδέ μ' ὑπὲρ πασῶν ἀντεφίλησε θεῶν·
Ὃς πόρον εὗρ' ἀπόρων, αἰεὶ φώτισσε σκοτεινὸν
Συμμύσταις, ζοφερῷ κεῖται ἐνὶ σκότεϊ;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κεῖται, πᾶσιν μερόπεσσι φαεινός,
Οἵ τε καὶ Εὐσεβίην, καί σε, φίλη, ἔφιλον.
Μάθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεά, κατὰ δάκρυα λείβεις,
Καὶ στέρνον πλήττεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τόπον, οὐχ ὅπως (τὸ πάλαι τάχα ποιησαίμην
Ὅτταν ἔην πάντων πουλὺ μάκαρ μακάρων)
Γαίην κινήσαιμι, ἀκίνητόν περ ἐοῦσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, ποσσὶν σεῖο προσισαμένη,
Αὐτὴ ἀκίνητος μίμνω, νεαρῆς τε λυπηρὸν
Μνῆμα πέλω Νιόβης πᾶσιν ἐφημερίοις·
Ὁδοιπ. Ὦ θεαί, οὐκ ἔστιν δακρύων ἅλις; οὔποτε νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στοναχαῖς εἰς φάος αὖθις ἔβη.
Ἀλλ' ἴτε, κ' εὐόδμοισι ῥόδοις καταπάσσατε γαίην,
Λείρια μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον·
Εὔχαθ', ὥσπερ ἔην μερόπων βαρὺς οὐδενὶ ζωός,
Οὕτω καὶ κούφη γαῖα νεκρῷ τελέθῃ.

Μ. ΣΛΆΔΟΣ,
ἰατρὸς Ἀμστελ.

PRINCIPIA
MATHESEOS
VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES,

Conſcripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio tertia, priore correctior.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Generis & virtutum Nobilitate Perilluſtri & Generoſo Heroï,

D. CHRISTIANO THOMÆ,

TOPARCHÆ IN STAVGARD,
Equiti Aurato, Sereniſſimæ Regiæ Majeſtatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Haſnienſis Conſervatori ſummo, Patrono incomparabili.

NOn minùs verè quam eleganter Cicero lib. 1. Tuſc. quæſt. *Magni*, inquit, *eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere.* Cùm enim mens noſtra, quam in nobis concluſam circumferimus, divina quædam particula habeatur, nihil ſanè illi gratius accidere poteſt, quàm, cùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique ſuæ quàm ſimillima redditur. Senſuum quippe ufurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præftant; mente verò quia non gaudent, univerfam hanc mundi machinam, quafi tabulam pictam afpiciunt, nec cogitant quâ de causâ quóve modo tot varietates rerum fint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt femetipfos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent fefe fenfuum judicio ita mancipari, ut ea fufficere putent, quæ manibus quafi palpare poffunt, ac pauca velint fi non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ fenfus non approbant, & pauciffima eligant, nifi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri poffumus, hoc propofitum utile effe atque neceffarium, ut initio juvetur cogitatio noftra & intel-

intellectus ; unde factum eſt , quòd Geometræ figuras , Arithmetici numerorum characteres , aliique alia ſubſidia invenerint ; Sed experimentis ejuſmodi vix acquieſcere debent magna ingenia , nec poteſt is , qui ſapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet , multa facilè mereri mentis aſſenſum , & eſſe veriſſima , etiamſi ſenſuum judicio pro veris non agnoſcantur : & vice versâ , ſenſus quædam approbare ; quæ , quia falſa , ratio nullo modo admittere poteſt. Atque hæc licèt omnibus in confeſſo ſint , non deſunt tamen , qui nihil niſi Praxin amantes , Theoriam & ſpeculationes omnes odio proſequuntur , atque ut inutilia eliminant : quos pertinaciæ ſuæ ſerò nimis pœnitebit , cùm aliorum imperio ita ſubjecti eſſe coguntur , ut ne in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſasque inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæque uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes penetrare, eaſdemque invenire poſſint; adeoque ſuper-

ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cùm contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuêre, viderent. Ad quæ invenienda cùm non aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ poſtquam innotuit,
lon-

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodiêre. Non patitur tempus & lex scribendi; ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, sed etiam Opticam aliasque scientias manaverint emolumenta. Nihil enim sani antehac de visu novimus, cum omnia hîc, sicut in aliis artibus, quæ materiæ immersæ, non abstrahuntur à sensibus, ad directionem mentis, disputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonstrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hospites sunt, sat sciunt, quàm incerta, quamque defectuosa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falsa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, deque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantia, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitiùs introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opus mihi eſt, multa coram Te, Heros Perilluſtris, de hujus artis totiusque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Matheſis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſura

quam-

quamquam ſciam hoc ſcriptum non poſſe notari ; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti, faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibusque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quam experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate potius inſtigatus, Tibi hæc conſecrare ſum veritus: & quidem tantâ majore fiduciâ, & ſpe certiore, quantò certius mihi conſtat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia noſtra ſentit, & grato animo ſemper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique conſule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVAE

Scribebam Leidæ, Anno CIƆ IƆC L. *Calend. Iun.*

Devotiſſimus & obſequentiſſimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.

CVm omnes ſapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum ſapientis gravitate atque conſtantia ſit, quàm aut falſum ſentire, aut quod non ſatis exploratum ſit, ſine ulla dubitatione defendere: neſcio quo fato fiat, quòd non operam dent ejuſmodi ſtudiorum viam ingredi, quâ mens adſueſcat verum à falſis & dubiis diſtinguere. Quandoquidem enim à teneris adſueſcere multum eſt, egregiè ſibi conſulerent, ſi ad Matheſin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem diſciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari poteſt, modò conſideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmiſſis neceſſitate quadam ſequi, vel verum, vel dubium, vel falſum, prout præmiſſæ variis modis ſeſe habuerint: Adeò ut, etſi non aliis uſibus inſerviret Matheſis, tamen vel hoc nomine, ad ſui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea ſperaretur emolumentum. Quod cum abundè obſervatum & uſu comprobatum ſit à Veteribus, quos plerique noſtra ætate ita ſuſpiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidiſſe videantur, quàm quantum noſtrorum ingeniorum acies intueri poteſt; inter alia mirari ſubit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deſeruiſſe. Quippe compertum eſt, antiquos Philoſophos non permiſiſſe, ἀγεωμετρήτους *ſcholas ſuas ingredi, ut ad Sapientiæ ſtudium admitterentur, quique ante non haberent* λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. *Quod ſanè propoſitum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuiſſe cauſam, quòd ad illam pertigerint ſcientiam, quam poſteritas tantopere miratur, & quò virtute ſua nonnulli eniti ſe poſſe deſperant, conjiciam. Fruſtra enim ſpectatur fructus diſciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere* *potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim, factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices*

dices

dices stirpesque non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis hærere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusque esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant, quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent; quid mirum? si multi in ipso limine hæsitaverint, pluresque, quos, re inexpertâ, desperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas subtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipso olim, quàm à multis hodie expetita, præstitum esse repererim: diu multumque inter spem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari, quæ ad scientiarum incrementa emunctioris naris homines necessariò requiri jampridem censuerunt. Ego sanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti campos factus, postquam ad hasce oras Academiam Illustrem, quæ Leidæ est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis usibus destinaveram, publici juris redderem, de elementis hisce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido semper servari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam sperabam, si non nisi officiosa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui se bono *publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dni. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Universalis constitutionem animo comprehendisse. neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam; vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.*

PRIN-

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO

AD

GEOMETRIÆ METHODVM RENATI DES CARTES.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SIMPLICIVM.

CVM in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile sit à simplicissimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconsultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehensionum Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem versantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus speciem excludere, sed eas, quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique obviis repræsentare possint. Vnde cum in universa illarum Scientiarum constitutione, licèt diversa objecta respiciant, non nisi relationes sive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, considerentur; consentaneum est rationes atque proportiones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpote notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Neque enim ratio ulla est, quo minùs per a, b, c, &c. concipiantur magnitudines a, b, c, &c. quàm pondera aut numeri iisdem characteribus designati. Attamen quia tum phantasiæ tum sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

Vide dissertationem de methodo, parte secunda.

ſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per *a* & *b*, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per *a* intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per *b* longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per *a* & *a*, aut per *b* & *b* duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſuppoſuerisve *a* eſſe æqualem ipſi *b*, vel *a* & *b* ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur *a* ∞ *b*. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Vt ad deſignandum, lineam *a* eſſe bis ſumendam, ſcribo $2a$. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius *b*, ſcribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ *a*, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. ſic & duas tertias, tres quartas, &c. ipſius *b*, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Iam cum in univerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam *a* ad lineam *a*, ſcribo pro ſumma $2a$: ſic & ad addendum $2b$ ad $3b$, ſcribo $5b$. Lineæ enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet interpoſito ſigno +, quod denotat plus. Vt ſi ad lineam *a* ſit addenda linea *b*, ſcribo $a + b$, hoc eſt, *a* plus *b*, quo indicatur *b* eſſe additam ipſi *a*, vel adhuc eſſe addendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Vt ad addendum $2b$, b, & $3b$, ſcribo $6b$. Sic & ad addendùm *a*, *b*, & *c*, ſcribo $a + b + c$.

Exem-

Exempla additionis ſimplicium.

				$2b$
Add.	a.	$2b$.	$3d$.	b.
	a.	$3b$.	d.	$3b$.
Summa	$2a$.	$5b$.	$4d$.	$6b$.

				a.
Add.	a.	a.	$3c$.	b.
	b.	$2b$.	$4d$.	c.
Summa	$a+b$.	$a+2b$.	$3c+4d$.	$a+b+c$.

Vbi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum eſſe literam d ſibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in ſequenti exemplo & ſimilibus eſt obſervandum: ut &, cùm plures adduntur diverſæ literæ, perinde eſſe quo ordine ſcribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum ſimplicium.

IAm verò ad ſubtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, ſcribendum eſt $3a$: ſiquidem lineæ, quæ iiſdem literis ſunt deſignatæ, ſubducuntur, ſubtrahendo tantùm à ſe invicem numeros præfixos. Sic & ſi $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ ſeu b. Similiter ſublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet 0 ſeu nihil.

Quòd ſi verò lineæ diverſis literis notatæ fuerint, ſubductio fiet interpoſito ſigno —, quod denotat minus. Vt ſi ab a ſubtrahenda ſit b, ſcribo $a-b$, hoc eſt, a minus b, quo indicatur b eſſe ſublatam ex a, vel adhuc eſſe ſubducendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, hoc eſt, quæ ex priori eſt ſubtrahenda.

Eodem modo, ſublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla ſubtractionis ſimplicium.

Ex	$5a$.	$3b$.	$4d$.	a.	Ex	a.	$3c$.	a.	$2c$.
ſubtr.	$2a$.	$2b$.	d.	a.	ſubtr.	b.	$4d$.	$4b$.	d.
reliq.	$3.a$.	b.	$3d$.	o.	reliq.	$a-b$.	$3c-4d$,	$a-4b$.	$2c-d$.

Vnde notandum, in ejuſmodi quantitatum ſubtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia ſubtrahi debet, eſſe minorem:

hoc eſt, ad ſubtrahendum b ex a, (ut in ſuperiori exemplo) opus eſſe, ut b ſit minor quàm a. Quòd ſi autem non proponatur aut conſtet, utra quantitas ſit major aut minor, & tamen ſubductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a \sim b$, hoc eſt, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum ſimplicium.

Porrò ad multiplicandum lineam a per lineam b, ſcribo ab vel ba. Sic & ad multiplicandum a per a, hoc eſt, a in ſe, ſcribo aa ſeu a^2: & aaa ſeu a^3 ad prædictum productum aa adhuc ſemel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè ſeſe conſequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam eſſe, indicent. Non ſecus, ſi multiplicare velim a, b & c per invicem, ſcribo abc, vel bac, vel cba &c: & abb ſeu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum a, b, & b. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine ſcribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in ſe, id quod producitur vocatur Quadratum ejuſdem numeri, & ſi productum illud adhuc ſemel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipſius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque ſi a multiplicetur per a, productum aa ſeu a^2 appellari conſuevit a quadratum, ſeu a duarum dimenſionum; & ſi aa rurſus multiplicetur per a, producetur aaa ſeu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, ſeu a trium dimenſionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a ſurdeſolidum, a quadrato-cubus, &c. ſeu, a habens 4, 5, aut 6, &c. dimenſiones.

Sicuti autem numerus aliquis, ſi in ſe ducatur, dicitur radix quadrata iſtius producti ſeu quadrati: & ſi adhuc ſemel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus poſterioris producti appellatur, &c; ſic & a dicitur radix Quadrata ex aa ſeu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Surſolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis eſt intelligendum.

Ex quibus conſtat diligenter eſſe notandum, quòd magnum ſit diſcrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus eſt, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo eſt adſcriptus. Vt inter $2a$ & a^2, $3a$ & a^3, $4a$ & a^4, &c. ſiquidem

per

per $2a$, $3a$, $4a$, &c. ſimpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. ſumpta, hoc eſt, a ſibi ipſi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipſius a, hoc eſt, ipſa quantitas a toties poſita & multiplicata.

Exempla multiplicationis ſimplicium.

Multipl.	$a.$	a	aa	ab	ab	ab	aa	$a^3.$
per	$b.$	a	a	c	b	cd	ab	$a^3.$
productum	$ab.$	$aa.$	$a^3.$	$abc.$	$abb.$	$abcd.$	$a^3b.$	$a^6.$

Vbi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a reſpicere, non autem ſequentem b: quod, cum brevitatis causâ ſcribatur pro $aaab$, in omnibus ſimilibus caſibus quoque eſt intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc eſt, aaa per a^3 ſeu aaa, producetur a^6, hoc eſt, $aaaaaa$.

Quòd ſi quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, ſive integri ſive fracti præfiguntur, oportebit dictos numeros in ſe invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exſurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Vt ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod ſi præfigatur ipſi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæſitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hîc ipſi c præfigi ſubintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, ſi ad multiplicandum $3ab$, hoc eſt, ter ab per $2cd$, hoc eſt, bis cd, ſcribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc eſt, ſemiſſe ipſius aa per tertiam partem ipſius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc eſt, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{3}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3.$
per	$3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3.$
product.	$6ab.$	$2bc.$	$\frac{3}{4}ad.$	$6abcd.$	$\frac{1}{6}a^3b.$	$3a^3b^3.$	$4a^6.$

Vbi tandem ſciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimenſionum ſeu literarum; earum tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Vt ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab + 2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab - 2bc$, Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QVoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

$$\text{Divid.}\ \left.\begin{array}{l} ab \\ \text{per}\ a \end{array}\right\} b\ \text{quot.}\ \left.\begin{array}{c} aa \\ a \end{array}\right\} a.\ \left.\begin{array}{c} a^3 \\ a \end{array}\right\} aa.\ \left.\begin{array}{c} abc \\ a \end{array}\right\} bc.\ \left.\begin{array}{c} abc \\ ab \end{array}\right\} c.\ \left.\begin{array}{c} a^3b \\ ab \end{array}\right\} aa.\ \left.\begin{array}{c} a^5 \\ aa \end{array}\right\} a^3.$$

$$\text{Divid.}\ \left.\begin{array}{l} 6ab \\ \text{per}\ 2a \end{array}\right\} 3b.\ \left.\begin{array}{c} \tfrac{1}{6}a^3b \\ \tfrac{1}{3}ab \end{array}\right\} \tfrac{1}{2}aa.\ \left.\begin{array}{c} 3a^3b^3 \\ 3b^3 \end{array}\right\} 1a^3\ \text{ſeu}\ a^3.\ \left.\begin{array}{c} 3a^3b^3 \\ a^3 \end{array}\right\} 3b^3.$$

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Vt ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hîc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibuſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QVANTITATVM COMPOSITARVM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & ſubtractione oriuntur quantitates, per ſignum + compoſitæ, aut per ſignum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compoſitæ dicuntur); conſequens eſt, ut harum quoque operationem deinceps oſtendamus.

De Additione quantitatum compoſitarum.

IGitur ad addendum quantitates Compoſitas, iiſdem literis notatas, oportet conſiderare ſigna + & —, quibus afficiuntur, & notare, ſi eadem fuerint, additionem fieri ut in ſimplicibus, & earum ſummæ præfigi idem ſignum. Vt ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis a ad a, & $3b$ ad $2b$, ſumma erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit ſummam $5a - 4b$.

Quòd ſi verò ſigna diverſa fuerint, ſubtrahendæ erunt quantitates eiſdem literis denotatæ, ſicut in ſubtractione ſimplicium, & ei quod relinquitur præfigendum eſt ſignum, quo major quantitas afficitur. Vt ſi addendum ſit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis $3b$ ad $2b$, & ſubtractis $2a$ ex $5a$, ſumma erit $5b + 3a$. Similiter ſi $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet ſumma $2a - 3d$. Vbi patet ſi $2b + a$ addatur ad $3b - a$, ſummam fore $5b$: quantitates enim $+ a$ & $- a$, cum propter diverſa ſigna ſint ſubtrahendæ, ſe mutuò tollunt.

Iam ad addendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet tantùm eas ſuis ſignis connectere. Vt ad addendum $a + b$ ad $c - d$, ſcribo $a + b + c - d$: ſiquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur ſignum, intelligitur ſibi præfixum habere ſignum +.

Exempla additionis compoſitarum.

Add.	$a + 3b$	$2a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{5}{4}abc$	$aa + 2a - 3.$
	$a + 2b$	$3a - 3b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6.$
ſumma	$2a + 5b.$	$5a - 4b.$	$ab + bb.$	$\frac{5}{3}a^3 - 2abc.$	$2aa + 3a - 9.$
Add.	$3b + 5a$	$a + d.$	$2b + a$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5a + 6.$
	$2b - 2a$	$a - 4d.$	$3b - a$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6.$
aggr.	$5b + 3a.$	$2a - 3d.$	$5b.$	$2aa - ab.$	$5a^3 + \frac{1}{6}aab.$	$2aa - 4a.$

Add.	$a+b$	$2aa+3ab-bb$	$3abc$	$a^3+2abb-aab+abc.$
Summa	$c-d$	$5ab-3aa$	a^3-abc	$a^3+aab-3abb-b^3.$
ſeu aggr.	$a+b+c-d.$	$8ab-aa-bb.$	$a^3+2abc.$	$2a^3-abb+abc-b^3.$

E quibus manifeſtum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, ſcribi poſſit $3b+5a+2b-2a$, hoc eſt, $5b+3a$: ſiquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eiſdem literis denotatas, quando diverſa habent ſigna, ſubtrahendas eſſe, & ſummæ aſcribendum eſſe ſignum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compoſitarum.

PОrrò ad ſubtrahendum quantitates compoſitas, quæ eiſdem literis ſunt denotatæ, ſciendum eſt: ſi ſigna eadem fuerint, & quantitas è qua ſubtractio fieri debet, major ſit quantitate ſubducendâ; tum ſubtractionem fieri ut in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſſe idem ſignum. Vt ſi ſubtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (ſubtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non ſecus ſi ſubtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò ſigna eadem fuerint, & quantitas à qua ſubtractio fieri debet quantitate ſubducendâ minor ſit; oportet, ſubtractâ minore ex majore, reſiduo ſignum contrarium præponere. Vt ſi ſubtrahendum ſit $a+3b$ ab $3a+2b$: ſubtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, reſiduum erit $2a-b$. Similiter, ſublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd ſi quantitates iiſdem literis deſignatæ, atque ad ſubtrahendum propoſitæ, diverſa ſigna habeant; erunt ipſæ addendæ, ut in ſimplicibus, & ſummæ præfigendum ſignum quantitatis, à qua ſubductio fieri debet. Vt ſi velimus ſubtrahere $a-b$ ex $2a+b$: ſubtractis a ex $2a$, additisque b ad b, reſiduum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ ſubductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad ſubtrahendum quantitates diverſis literis denotatas, oportet quantitates ſubducendas, variatis ſignis connectere cum iis, à quibus ſubductio fieri debet. Vt ſi ſubtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia ſeu reſiduum $a+b-c+d$: variatis nempe ſignis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla ſubtractionis compoſitarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$
Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Reſid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$
Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$
Ex		$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$
Subtr.		$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-2a^3+c^3-abb.$
Rel. reſid. ſeu diff.		$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perſpicuum fit (cum ad ſubtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ ſcribi poſſit $3a+2b-a-3b$, hoc eſt, $2a-b$, ſubtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$) : quantitates eiſdem literis denotatas, quando eadem habent ſigna, ſed quantitates ſubducendæ aliis ſunt majores, ſubtrahendas eſſe, & relicto præponendum eſſe ſignum contrarium.

Similiter quoniam ad ſubtrahendum $a-b$ ex $2a+b$, ſcribere poſſum $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$, (ſubtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eiſdem literis deſignatæ, cùm diverſa habuerint ſigna, ſint addendæ, & ſummæ præfigendum ſit ſignum ejus, à quâ ſubtractio fieri debet. Quòd autem ſubtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, ſcribendum ſit $2a+b-a+b$, variatis nempe ſignis quantitatum ſubducendarum, inde manifeſtum fit; quòd ad ſubtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote ſubducendo quantitatem a, præponendo ei ſignum $-$, ut in ſubtractione ſimplicium eſt dictum : at quoniam ſubducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus juſto tollitur, ſiquidem non a abſolutè tollendum proponitur, ſed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor ſit quàm juſta differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & ſcribere $2a+b-a+b$, hoc eſt, $a+2b$. Et ſic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

POst hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa + & — attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est + per +, vel — per —) facere signum +, diversa verò (hoc est + per —, vel — per +) facere —. Vt ad multiplicandum $a + b$ per c: multiplicatis $+ a$ per $+ c$, & $+ b$ per $+ c$, fiunt $+ ac$, & $+ bc$: quibus additis, fit productum $+ ac + bc$, seu $ac + bc$. Sic si multiplicandum sit $a - b$ per c, producetur $ac - bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a + b$ per $c + d$: multiplicatis enim $a + b$ per c, ut ante; & rursus $a + b$ per d (siquidem $a + b$ non tantùm per c, sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac + bc + ad + bd$. Non secus ad multiplicandum $a - b$ per $c - d$ scribitur $ac - ad - bc + bd$: multiplicatis nempe primùm $a - b$ per $+ c$, fit $+ ac - bc$: deinde $a - b$ per $- d$, fit $- ad + bd$. quippe $+ a$ per $- d$, producit $- ad$: at $- b$ per $- d$ producit $+ bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

Mult.	$a + b$	$a - b$	$a + b$	$a - b$	$a + b$
per	c	c	$c + d$	$c - d$	$a + b$
prod.	$ac + bc$.	$ac - cb$.	$ac + bc$	$ac - bc$	$+ ab + bb$
			$+ ad + bd$	$- ad + bd$	$aa + ab$
		product.	$ac + bc + ad + bd$.	$ac - bc - ad + bd$.	$aa + 2ab + bb$.

Multipl.	$a - b$	$a + b$	$aa - 2ab + bb$	$aa - ab + bb$
per	$a - b$	$a - b$	$a - b$	$a + b$
	$- ab + bb$	$aa + ab$	$- aab + 2abb - b^3$	$+ aab - abb + b^3$
	$aa - ab$	$- ab - bb$	$a^3 - 2aab + abb$	$a^3 - aab + abb$
prod.	$aa - 2ab + bb$.	$aa - bb$.	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$.	$a^3 + b^3$.

Mult.

Mult.	$3dd+4de+ee$	$2a^3+\frac{1}{2}aab+\frac{2}{3}abb$
per	$3dd-ee$	$\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa$
	$9d^4+12d^3e+3ddee$	$-a^5-\frac{1}{4}a^4b-\frac{1}{3}a^3bb$
	$-3ddee-4de^3-e^4$	$+\frac{4}{3}a^4b+\frac{1}{3}a^3bb+\frac{4}{9}aab^3$
product.	$9d^4+12d^3e-4de^3-e^4.$	$\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{9}aab^3-a^5.$

Multipl.	$4a^3+3aa-2a+1$
per	$aa-5a+6$
	$+24a^3+18aa-12a+6$
	$-20a^4-15a^3+10aa-5a$
	$+4a^5+3a^4-2a^3+1aa$
product.	$4a^5-17a^4+7a^3+29aa-17a+6.$

Cæterùm advertendum hîc eſt, non rarò utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodo eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Vt ad multiplicandum $\overline{4a^3+3aa-2a+1}$ per $\overline{aa-5a+6}$, ſcribo $\overline{4a^3+3aa-2a+1}$ in $\overline{aa-5a+6}$, vel $\overline{4a^3+3aa-2a+1}$ M $\overline{aa-5a+6}$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, ſic patet: Eſto $a-b$ multiplicandum per c, & ſit $a-b \infty e$: hinc ſi utrobique addatur b, fiet $a \infty b+e$. Iam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per c, erit $ac \infty bc+ec$, hoc eſt, auferendo utrinque bc, erit $ac-bc \infty ec$. Quocirca cum ſtatuatur $a-b \infty e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac-bc \infty ec$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur $-$ per $-$ multiplicatum producere $+$. Etenim ſi $a-b$ multiplicandum ſit per $c-d$: ponendo, ut ante, $a-b \infty e$, erit productum ex $a-b$ in $c-d$ æquale producto ex e in $c-d$ vel $c-d$ in e: id eſt, $ce-de$. Sed ce, ut ſupra, æquatur $ac-bc$: unde $ac-bc-de$ æquabitur producto ex $a-b$ in $c-d$. Porrò cum $a-b$ æqualis ſit poſita ipſi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad-bd$ æquetur producto de: hinc ſi ex $ac-bc$ ſubtrahatur $ad-bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac-bc-ad+bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Diviſione quantitatum compoſitarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compoſitas, operatio non abſimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per ſe invicem dividuntur. Quod autem ſigna $+$ & $-$ concernit, ſciendum eſt, ſi dividatur $+$ per $+$, aut $-$ per $-$, ſemper oriri $+$; at ſi $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ dividatur, ſemper oriri $-$. omninò ut in multiplicatione. Operationem autem ſive à dextra ſive à ſiniſtra incipias perinde erit. Vt ad dividendum $ac+bc$ per c: diviſis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in ſimplicibus eſt oſtenſum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæſitus erit $a+b$. Similiter ſi dividatur $ac-cb$ per c, orietur $a-b$: diviſis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non diſſimili ratione dividitur $ac+ad+bc+bd$ per $c+d$, & fit $a+b$. Cujus operatio talis eſt.

Divid.	$ac+ad+bc+bd$.	$\frac{+ac}{+c}$	$+a.$ $\frac{+bc}{+c}$ $+b.$
per $c+d$)	$\underline{ac}+\underline{ad}+\underline{bc}+\underline{bd}$		
	0 0 0 0		
Quotiens	$+a+b$.		

Diviſo ac per c, (ut in ſimplicibus) fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. hinc multiplicato diviſore $c+d$ per quotientem inventum a, productum $ac+ad$ ex dividendo auferatur, ſcribendo partes ejuſdem denominâtionis ſub invicem, & reliquum ſub linea infra ductâ. Vnde cum ſubducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, ſcribitur ſub linea ducta 0. Deinde diviſo $+bc$ per $+c$, fit $+b$, aſcribendum priori quotienti. unde multiplicato diviſore $c+d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc+bd$. id quod ſi ſcribatur, ut ante, ſub dividendo, & fiat ſubductio; erit pro reliquo ſub linea ſcribendum 0. Et peracta erit diviſio.

Eodem modo ad dividendum	$ac-ad-bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a$
per $c-d$:)	$\underline{ac}-\underline{ad}-\underline{bc}+\underline{bd}$		
	0 0 0 0	$\frac{+bc}{+c}$	$-b$
Erit quotiens	$+a-b$.		

Divido primùm ac per c, & fit a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Iam multiplicato diviſore $c-d$ per $+a$, fit productum

$ac-$

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c - d$ per $-b$, fit productum $-bc + bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a - b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$

$$\begin{array}{rrl} \text{per } a-b:\ )\ aa - & ab & \\ \text{o} - & ab & \\ - & ab + bb & \\ & \text{o}\quad \text{o} & \\ \text{fit quotiens} & a - b. & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ \hline -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a - b$ per a, & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a - b$ in $-b$, fit productum $-ab + bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a - b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa - bb$ per $a + b$.

$$\begin{array}{lr|l} \text{Divid.} & aa - bb & -ab \\ \text{Diviſ. } a+b\ ) & aa - bb & -ab \\ & \text{o}\quad \text{o} & \text{o} \\ \text{Quotiens} & a - b & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a + b$ per quotientem inventum a, producetur $aa + ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hîc terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a + b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab - bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractionem relinquat o; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{Dividend.} & a^3 + b^3 & - abb & + aab \\
\text{Divisor } a + b) & + a^3 + b^3 & - abb & + aab \\
 & 0 \quad 0 & 0 & 0 \\
\text{Quotiens} & \multicolumn{3}{c}{+ aa - ab + bb.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
b^3 & bb \\
b & \\
- abb & - ab \\
+ b & \\
+ aab & + aa \\
+ b &
\end{array}
$$

Etenim diviso $+ b^3$ per $+ b$, fit $+ bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a + b$ in $+ bb$, producitur $+ abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $- abb$. Deinde diviso $- abb$ per $+ b$, oritur $- ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a + b$ exsurgit $- aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+ aab$. Denique diviso $+ aab$ per $+ b$, prodibit $+ aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a + b$ per $+ aa$, & productum $+ a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum o. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.

$$
\begin{array}{lrrrr}
\text{Dividend.} & a^3 & - 3aab & + 3abb & - b^3 \\
\text{Divisor } a - b.) & & & + abb & - b^3 \\
 & & & + 2abb & 0 \\
 & & - 2aab & + 2abb & \\
 & & - aab & 0 & \\
 & a^3 & - aab & & \\
 & 0 & 0 & & \\
\text{Quotiens} & \multicolumn{4}{l}{+ aa - 2ab + bb.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
- b^3 & + bb \\
- b & \\
+ 2abb & - 2ab \\
- b & \\
- aab & + aa \\
- b &
\end{array}
$$

$$\frac{-e^4}{-ee} = +ee$$

Dividend. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$

Divis. $3dd - ee)\ 9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4 \mid -3ddee$

o o o o o $\quad -\;ee$

$$\frac{-3ddee}{-ee} = +3dd.$$

Quotiens $+4de + 3dd + ee$

$$\frac{-4de^3}{-ee} = +4de.$$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$

Divis. $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa)\ +\frac{4}{3}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5 \mid -\frac{1}{3}a^3bb$

$-\frac{1}{4}a^4b$ o o o

$-\frac{1}{4}a^4b$

o

Quotiens $+\frac{2}{3}abb + \frac{1}{2}aab + 2a^3.$

$$\frac{-a^5}{-\frac{1}{2}aa} = +2a^3. \qquad \frac{-\frac{1}{4}a^4b}{-\frac{1}{2}aa} = +\frac{1}{2}aab. \qquad \frac{-\frac{1}{3}a^3bb}{-\frac{1}{2}aa} = +\frac{2}{3}abb.$$

Divid. $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbdd \mid -b^3d \mid -aabd$ Pag. 340.

Div. $d+b)\ d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \mid -bd^3 \mid +bbda \mid -b^3a \mid -aabd$ lin. 4.

o o o o o o o o o o

Quotiens $+d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab.$

$$\frac{d^4}{d} = d^3. \quad \frac{-bd^3}{+d} = -bdd. \quad \frac{+bbdd}{+d} = +bbd. \quad \frac{-b^3d}{+d} = -b^3.$$

$$\frac{+2aady}{+d} = +2aay. \quad \frac{+aadd}{+d} = +aad. \quad \frac{-aabd}{+d} = aab.$$

Dividend. $+y^6 - 8y^4 - 124yy - 64$ $\qquad \frac{-64}{-16} = +4$ Pag. 77.

Divisor $yy - 16)\ +y^6 + 8y^4 + 4yy - 64$

o $-16y^4 - 128yy$ o $\qquad \frac{-128yy}{-16} = +8yy.$

$-16y^4 - 128yy$

o o $\qquad \frac{-16y^4}{-16} = +1y^4.$

Quotiens $+1y^4 + 8yy + 4.$

	Dividend.	$+y^6+aay^4-2ccy^4-a^4yy+c^4yy-a^6-2a^4cc-aac^4 \mid +2aaccyy$
Pag. 78.	Div. $yy-aa-cc)$	$\underline{+y^6}-\underline{aay^4}-\underline{ccy^4}-\underline{2a^4yy}+\underline{c^4yy}-\underline{a^6}-\underline{a^4cc}-\underline{aac^4}. \mid \underline{+aaccyy}$
		$0 + 2aay^4-ccy^4+a^4yy \quad 0 \quad 0 - a^4cc \quad 0 \quad + aaccyy$
		$+\underline{2aay^4}-\underline{ccy}\ +\underline{a^4yy}. \qquad \underline{-a^4cc} \qquad + \underline{aaccyy}$
		$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \qquad 0$
	Quotiens	$+y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$

$$\frac{+y^6}{+yy}\Big|\,+y^4.\ \frac{+2aay^4}{+\ \ yy}\Big|\,+2aayy.\ \frac{-ccy^4}{+\ yy}\Big|\,-ccyy.$$

$$\frac{+a^4yy}{+\ yy}\Big|\,+a^4.\ \frac{+aaccyy}{+\ \ yy}\Big|\,+aacc.$$

Pag. 380.	Dividend.	$+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q \mid +ffuuq$
lin. 15.	Div. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu)$	$\underline{\frac{1}{4}q}-\underline{\frac{1}{4}fq}+\underline{f^3uuq}-\underline{fuuq}-\underline{4f^4u^4q}+\underline{4f^3u^4q} \mid \underline{+ffuuq}$
		$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.$
	Quotiens	$+q-4fuuq.$

$$\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}\Big|\,+q.\quad \frac{-fuuq}{+\ \frac{1}{4}}\Big|\,-4fuuq.$$

Quod si quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, subscribendus erit divisor ipsi dividendo, interjectâ lineolâ, sicut in fractionibus vulgaribus. Vt ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, scribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ divisum esse per $d+e$, vel adhuc esse dividendum. Sic & si $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens seu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc est, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe sæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, divisionem, quantùm fieri potest, instituere, & quod superest instar fractionis quotienti adscribere. Et tantum de divisione.

DE EXTRACTIONE RADICIS.

QVoniàm autem de Radicis Extractione, quæ pro divisionis specie haberi potest, agendum restat, sciendum est, ejus operationem non esse diversam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, ſeu a quadratum, cujus radix ſeu latus dicitur a; ſic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rurſus a. Similiter cum aa, hoc eſt, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 ſeu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et ſic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit ſi ex quantitatibus compoſitis radix ſit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus ſimplicibus radicis extractio non ſecus ſe habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius ſit characteris: ita radix, quantitas exiſtens compoſita, non aliter extrahetur, ac ſi ex aliquo numero radix, quæ pluribus conſtet characteribus, eliceretur.

Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in ſe multiplicata & ab aa ablata relinquit o. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

$$\begin{array}{lccc} \text{Quadratum} & aa & +\,2ab & +\,bb \\ & \underline{aa} & +\,2\underline{ab} & +\,\underline{bb} \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{Radix} & \multicolumn{3}{c}{\overline{a + b}} \\ \text{Diviſor} & \multicolumn{3}{c}{\overline{2a}} \end{array}$$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adſcribo priori radici inventæ a. Hinc ſi ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod ſublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter ſi multiplicetur b in ſe, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæſita $a + b$. Et ſic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compoſitis.

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & \underline{a^4 - 2aabb + b^4} \\ \text{Radix} & \underline{aa - bb} \\ \text{Diviſor} & 2aa \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Quadratum} & \underline{64xx - 160x + 100} \\ \text{Radix} & \underline{8x - 10} \\ \text{Diviſor} & 16x \end{array}$$

Quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$

$\underline{aa}+\underline{2ac}+\underline{cc}-\underline{2ab}-\underline{2bc}+\underline{bb}$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

Radix $\overline{a+c-b}$

Primus divisor $2a$

Secundus divisor $2a+2c$

Quadratum $\underline{aa}$ $\qquad a+c$

Radix a $\qquad$ per $\underline{2}$

$2a+2c$. secundus divisor.

$a \quad a$

per $\underline{2} \quad \underline{a} \qquad -2ab \mid -b$ quot. secundus.

Primus divisor $2a \quad aa \qquad +2a \mid$

$+2ac \mid +c$ quotus primus $\qquad 2a+2c$

$+2a \mid \qquad -b$

$\qquad -\overline{2ab-2bc}.$

$2a \qquad c \qquad -b$

$\underline{+\ c} \qquad \underline{c} \qquad \underline{-b}$

$+2ac \qquad cc. \qquad +bb.$

Cubus $\underline{a^3+3aab+3abb+b^3}$

Radix $\underline{a+b}$ $\qquad +3aab \mid +b.$

Divisor $3aa$ $\qquad +3aa \mid$

Cub. $27x^6-54x^5+171x^4-188x^3+285xx-150x+125$ Cub. $\underline{27x^6}$

$\underline{27x^6}-\underline{54x^5}+\underline{36x^4}-\underline{8x^3}+\underline{60xx}-\underline{150x}+\underline{125}$ Rad. $3xx$.

$0 \qquad 0+135x^4-180x^3+225xx \qquad 0 \quad 0$ $\qquad 3xx$

$+135x^4-180x^3+225xx$ $\qquad \underline{3xx}$

$0 \quad 0 \quad 0$ $\qquad 9x^4.$

Radix $\overline{3xx-2x+5.}$ $\qquad$ per 3

Primus divis. $27x^4$ $\qquad -54x^5 \mid$ $\qquad 27x^4$ 1. div.

Secundus divisor $27x^4-36x^3+12xx$ $\qquad +27x^4 \mid -2x$ quot. primus.

$-2x$

$$\begin{array}{r} +27x^4 \\ -2x \\ \hline -54x^5 \end{array}\qquad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ +3xx \\ \hline +12x^4 \\ \text{per}\ \ 3 \\ \hline +36x^4. \end{array}\qquad \begin{array}{r} -2x \\ -2x \\ \hline +4xx \\ -2x \\ \hline -8x^3 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 3xx-2x \\ 3xx-2x \\ \hline -6x^3+4xx \\ 9x-6x^3 \quad \\ \hline 9x^4-12x^3+4xx \\ \text{per}\qquad\qquad 3 \\ \hline 27x^4-36x^3+12xx. \end{array}\ \text{Secund.div.}$$

$$\begin{array}{r|l} +135x^4 & +5 \text{ quotus secund.} \\ +\ 27x^4 & \end{array}\qquad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +3xx-2x \\ \hline +75xx-50x \\ \text{per}\ \ 3 \qquad \\ \hline +225xx-150x. \end{array}\qquad \begin{array}{r} +5 \\ +5 \\ \hline +25 \\ +5 \\ \hline +125. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +27x^4-36x^3+12xx \\ +\qquad 5 \\ \hline +135x^4-180x^3+60xx. \end{array}$$

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\surd$. Vt ad extrahendum radicem quadratam ex aq, scribo $\surd\, aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\surd\, \overline{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, scribo $\surd\, C.aaq$. Vt & $\surd\, \overline{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Vbi notandum, signum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi $\surd\, \underline{Q}$, vel etiam simpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd\, C$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd\, \underline{Q}\,\underline{Q}$ seu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\surd$ ②, $\surd$ ③, $\surd$ ④, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd$ ℨ, $\surd$ cε, $\surd$ ℨℨ, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

QVandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur, facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Vt $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Vnde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet multiplicato a per d, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $\frac{+aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb, pro pro-

producto scribendum esse numeratorem aa. Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Vnde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a; superest tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæsitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm restat 1 per ab, & fit productum quæsitum $1ab$ seu ab. Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciorem; elisâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: elisis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab^3 quàm abc per ab, fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^6ccoomm+4a^6ccm^3p}{oopp z^4+4mp^3z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6ccmm}{ppz^4}$. *Pag. 214. lin. 15.*

Non secus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

 aa—

$\frac{aa - ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+ 2abb + 2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+ 2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Vt & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Vt,

Vt, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd:conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$:. Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3 b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifeſtum eſt $a^4 + a^3 b - aabb - ab^3$ eſſe quantitatem quæſitam. Sic & ſi datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi poteſt per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipſa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ ſimiliter aliam quæro, ut $a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam diviſibilis ſit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6$ eſſe quantitatem quæſitam. Et ſic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QVibus explicatis, facile eſt oſtendere, quâ ratione fractiones diverſæ denominationis reduçantur ad fractiones ejuſdem denominationis. Vt ad reducendum fractiones $\frac{b^3 d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per denominatores aac & cd (ut jam eſt oſtenſum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Iam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque ſcilicet ex denominatoribus datis, & quotientis d & aa multiplicentur per numeratores $b^3 d$ & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæſiti $b^3 dd$ & a^5, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^3 dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi poteſt per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæſitæ $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo ſi $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non ſecus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ ſub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5},$$

$$\frac{a^8 - 3a^7 b + 5a^7 bb - 6a^5 b^3 + 5a^4 b^4 - 3a^3 b^5 + aab^5}{a^6 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5},$$

$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb - a^5 b^3 - a^3 b^5 + aab^5 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$

$$\frac{a^8 - a^7 b + 2a^6 bb - 2a^5 b^3 + 2a^4 b^4 - 2a^3 b^5 + aab^5 - ab^7}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & ſubtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim ſi fractiones ejuſdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut ſubtrahere, & ſummæ vel reliquo ſubſcribere denominatorem communem. Vt ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, ſumma erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d + e}$ additum ad $\frac{2ae}{d + e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d + e}$, ſeu $2a$. Non ſecus ſi addantur $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{bb}{b + d}$, & $a - \frac{dd}{b + d}$, erit ſumma $a + \frac{2bd + bb}{b + d}$.

Quod ſi fractiones diverſæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum eſt. Vt ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$? fiet ſumma $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non ſecus ſi addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit ſumma $\frac{4a^8 - 6a^7 b + 9a^5 bb - 9a^5 b^3 + 7a_4 b^4 - 6a_3 b^5 + 3aab^5 - 2ab_7 + b^8}{a^7 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^5}$,

Iam ad ſubtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, ſcribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo ſubductis $\frac{2ae}{d - e}$ à $\frac{2ad}{d - e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d - e}$ ſeu $2a$ Similiter $\frac{bd}{b + d}$ de $d + \frac{bd}{b + d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b + d}$.

Nec aliter fit, ſi ſubtrahendum ſit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$ relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

Ad multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & d, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per d: eritque productum $\frac{a^4 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$

& $a -$

& $a - b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $aa - ab + bb$ per $a - b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3 - 2aab + 2abb - b^3}{a}$ seu $aa - 2ab + 2bb - \frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx - 5x}{x + 5}$ per $\frac{xx - 25}{x}$: reductis $xx - 5x$ & x ad $x - 5$ & 1, itemque $xx - 25$ & $x + 5$ ad $x - 5$ & 1, multiplico tantùm $x - 5$ per $x - 5$, & fit productum $xx - 10x + 25$.

Præterea ad multiplicandum $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - b$: quoniam a per $a - b$ facit $aa - ab$, & $\frac{bb}{a - b}$ per $a - b$ facit bb; hinc productum quæsitum erit $aa - ab + bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa - ab}{a + b}$ per $aa - bb$, & producetur $a^3 - 2aab + abb$. cum enim $aa - bb$ fiat ex $a + b$ in $a - b$, & $\frac{aa - ab}{a + b}$ multiplicatum per $a + b$ producat $aa - ab$, superest tantùm multiplicandum $aa - ab$ per $a - b$, ut habeatur $a^3 - 2aab + abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$ per $c - d$, fiet, divisis $cd - dd$ per $c - d$, productum $\frac{a^3 - abb}{d}$.

De Divisione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione si $\frac{a^3 - abb}{c - d}$ dividatur per $\frac{aa + 2ab + bb}{c - d}$, orietur $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ seu $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Quòd si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem denominationem fiet, si multiplicatio instituatur per crucem, ut in vulgaribus. Vt ad dividendum $\frac{a^3 - b^3}{a + b}$ per $\frac{aa - ab + bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore $a^3 - b^3$ per posterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa - ab + bb$ per illius denominatorem $a + b$, fiunt $a^3c - b^3c$ & $a^3 + b^3$; hinc quotiens erit $\frac{a^3c - b^3c}{a^3 + b^3}$.

Ad-

Advertendum autem hîc eſt, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, ſicut etiam denominatores non rarò ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Vt ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci poſſint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^4 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens diviſionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione ſi $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci poſſunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: ſubſtituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci poſſunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc eſt, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæſitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, ſi dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exſurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CVm in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæſitam: hinc ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam ra-

dix

dix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c, ſcribo pro radice quæſita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ eſt $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10 - 8x}{5}$ ſeu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\sqrt{}$. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SVRDARVM.

QVemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

SCiendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs ſit, quantitates ſurdas, ſi diverſa ſigna radicalia habuerint, reducere ad idem ſignum radicale. Quod fit, ſi ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipſos ſine reliquo dividi poſſit. Vt ad reducendum $\surd aq$ ſeu $\surd\,2\;aq$ & $\surd C.aaq$ ſeu $\surd\,3\;aaq$ ad idem ſignum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\surd Q$ & $\surd C$ denominantur) minimum numerum, qui per ipſos ſine reliquo dividi poteſt, qui eſt 6. Iam cum 6 diviſo per 2 oriatur 3, & per 3 diviſo oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in ſe cubicè, & aaq quadratè; fientque ſub eodem ſigno $\surd QC.a^3q^3$ ſeu $\surd\,6\;a^3q^3$, & $\surd QC.a^4qq$ ſeu $\surd\,6\;a^4qq$. Sic & $\surd ab$ & $\surd\surd\overline{a^3b+ab^3}$ ſub eodem ſigno radicali erunt $\surd\surd aabb$ & $\surd\surd\overline{a^3b+ab^3}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in ſe reducitur ad aliquod ſignum radicale. Exempli gratiâ: ad reducendum $a+b$ ad idem ſignum radicis cum $\surd\overline{aa+bb}$ oportet multiplicare $a+b$ in ſe quadratè, & fit $\surd\overline{aa+2ab+bb}$. Non ſecus ſi multiplicetur $a+b$ in ſe cubicè, fiet $\surd\overline{C.a^3+3aab+3abb+b^3}$ ſub eodem ſigno cum $\surd\overline{C.a^3-b^3+abb}$. Et ſic de aliis.

Deinde ſciendum, quantitates ſurdas non rarò ad ſimpliciores reduci poſſe, tollendo ex ſigno radicali quicquid eſt rationale: nimirum, dividendo quantitates ſub eodem ſigno $\surd$ comprehenſas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Vt $\surd\overline{75\,aa}$ reduci poteſt ad $5a\surd 3$: nam $75\,aa$ producitur ex multiplicatione $25\,aa$ per 3, quarum radices ſunt $5a$ & $\surd 3$; adeò ut, ſi $75\,aa$ dividatur per quadratum $25\,aa$, ſub ſigno radicali tantùm ſcribendum ſit 3, hoc modo: $5a\surd 3$. Id quod monſtrat $5a$, hoc eſt, $\surd\overline{25\,aa}$, multiplicatum eſſe per $\surd 3$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi poſſit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\surd\overline{a^3b+aabb}$ ſcribi queat $a\surd\overline{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi poteſt per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix eſt $a+c-b$, & quotiens eſt $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi potest $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$.

Non secus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ scribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31. lin. 9.* reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, potest utriusque numerator dividi per $aamm$, cujus radix est am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit rationalis, liberabitur à signo $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco

$\sqrt{C.\, x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$
scribi potest $\overline{x - 3}\sqrt{C.\, x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verùm enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores omnes inveniantur, perinde atque in numeris est ostensum. vide p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi potest), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per se ipsam est dividenda. Vt ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rursus per a divisum dat $ab + bb$. Iam quia quotiens hîc per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se ipsam dividenda. Quibus peractis reserventur divisores a, a, b, & $a + b$.

Ratio inveniendi divisores omnes quarumcunque datarum quantitatum.

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b + aabb & aab + abb & ab + bb & a+b & 1 \\ a & a & b & a+b & \end{array}$$

Iam ut ex hisce divisoribus inveniantur divisores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per $1, a,$ & aa, fiuntque $b, ab,$ & aab. Denique multiplico $a + b$ per $1, a, aa, b, ab,$ & aab, & fiunt $a + b, aa + ab, a^3 + aab, ab + bb, aab + abb,$ & $a^3b + aabb$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline a. \quad a. \\ \hline aa. \\ \hline b. \quad ab. \quad aab. \\ \hline a+b.\,aa+ab.\,a^3+aab.\,ab+bb.\,aab+abb.\,a^3b+aabb. \end{array}$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a, aa, b, ab, aab, $a+b$, $aa+ab$, a^3+aab, $ab+bb$, $aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$$\begin{array}{r|r|r|l} a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6 & a^4-3aabb+b^4 & aa-ab-bb & 1 \\ aa+bb & aa+ab-bb & aa-ab-bb & \end{array}$$

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3$ per $aa-ab-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$\begin{array}{c} 1. \\ \hline aa+bb. \quad aa+ab-bb. \\ \hline a^4+a^3b+ab^3-b^4. \\ \hline aa-ab-bb.\ a^4-a^3b-ab^3-b^4.\ a^4-3aabb+b^4.\ a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6. \end{array}$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4\,a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78, *lin.* 12. Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Iam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per a aut c similemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hîc idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa + cc$, quâ denuo per seipsam divisâ, provenit 1. Vnde cum divisores reservati sint a, a, $aa + cc$, & $aa + cc$; ideo ut ex iis inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6 + 2a^4cc + aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa + cc$, fiuntque $aa + cc$, $a^3 + acc$, & $a^4 + aacc$: ac denique $aa + cc$, $a^3 + acc$, & $a^4 + aacc$ per $aa + cc$, & fiunt $a^4 + 2aacc + c^4$, $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, & $a^6 + 2a^4cc + aac^4$; eruntque divisores omnes 1, a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, $a^4 + aacc$, $a^4 + 2aacc + c^4$, $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, & $a^6 + 2a^4cc + aac^4$.

$a^6 + 2a^4cc + aac^4$	$a^5 + 2a^3cc + ac^4$	$a^4 + 2aacc + c^4$	$aa + cc$	1
a	a	$aa + cc$	$aa + cc$	

$$1.$$
$$a. \qquad a.$$
$$aa.$$
$$aa + cc. \; a^3 + acc. \; a^4 + aacc.$$
$$aa + cc. \; a^4 + 2aacc + c^4. \; a^5 + 2a^3cc + ac^4. \; a^6 + 2a^4cc + aac^4.$$

Similiter ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$: quia, factâ divisione per b, oritur $a^3 - aab + 2aac + acc - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & hujus quotientis per $a + b$, oritur $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, & radix quadrata ex $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$ est $a + c - b$, hoc est, $aa - 2ab - 2ac - 2bc + cc + bb$ divisum per $a + c - b$, dat $a + c - b$; divido demum $a + c - b$ per $a + c - b$, & fit 1. Vnde cum divisores reservati sint b, $a + b$, $a + c - b$, & $a + c - b$; multiplico b per $a + b$, & fit $ab + bb$: tum 1, b, $a + b$, & $ab + bb$ per $a + c - b$, fiuntque $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, & $aab + abc + bbc - b^3$: ac denique $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, & $aab + abc + bbc - b^3$ per $a + c - b$, fiuntque $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, $aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3$, $a^3 + 2aac + acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & $a^3b + aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$. Atque ita divisores omnes erunt 1, b, $a + b$, $ab + bb$, $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, $aab + abc + bbc - b^3$, $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, $aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3$, $a^3 + 2aac$

$+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non secus si proponatur a^3bc-ab^3c, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a-b$, & $a+b$ divisores sequentes: 1, $a, b, ab, c, ac, bc, abc, a-b, aa-ab, ab-bb, aab-abb, ac+bc, aac-abc, abc-bbc, aabc-abbc, a+b, aa+ab, ab+bb, aab+abb, ac+bc, aac+abc, abc+bbc, aabc+abbc, aa-bb, a^3-abb, aab-b^3, a^3b-ab^3, aac-bbc, a^3c-abbc, aabc-b^3c$, & a^3bc-ab^3c.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex superioribus facilè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Vt ad reducendum $a^3-abb, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primo (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ divisores: eruntque ipsius a^3-abb divisores 1, $a, a-b, aa-ab, a+b, aa+ab, aa-bb$, & a^3-abb: ipsius autem $aab-b^3$ divisores erunt 1, $b, a-b, ab-bb, a+b, ab+bb, aa-bb$, & $aab-b^3$: at verò ipsius $a^3+aab-abb-b^3$ divisores erunt 1, $a-b, a+b, aa-bb, aa+2ab+bb$, & $a^3+aab-abb-b^3$. Iam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a-b, a+b$, & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido $a^3-abb, aab, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque a, b, & $a+b$. Vbi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi divisores non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Vt ad abbreviandum $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi potest per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ scribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et sic de cæteris.

Vide supra pag. 22.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali.

dicali. Vt quia inter diviſores quantitatis $a^3 b + aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3 b + aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3 b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3 c + b^4$ pro diviſore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro

$\sqrt{a^3 b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3 c + b^4}$

ſcribi $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter diviſores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi poteſt per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ ſcribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd ſi inter diviſores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, niſi velis eam in formam fractionis deſignare. Vt quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter diviſores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per ſe conſideratæ ſurdæ exiſtant, tamen inter ſe collatæ duorum ſint generum: aliæ enim dicuntur Commenſurabiles ſeu Communicantes; aliæ verò Incommenſurabiles ſeu non Communicantes.

Communicantes ſunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter ſe ſunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, ſeu ſicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò ſunt, quarum unius ad alteram relatio non eſt ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoſcendi communicantes à non communicantibus eſt, ſi, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos ſunt reductæ, reperiantur inter ſe eſſe ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Vt $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ ſunt communicantes, quia diviſione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

 mu-

munem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25\,aa}$ & $\sqrt{9\,aa}$, hoc est, ad $5\,a$ & $3\,a$: adeò ut pro $\sqrt{75\,aa}$ & $\sqrt{27\,aa}$ scribi possit $5\,a\sqrt{3}$ & $3\,a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5\,a$ ad $3\,a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, seu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes sunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, seu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Vt ad addendum $\sqrt{75\,aa}$ & $\sqrt{27\,aa}$, hoc est, $5\,a\sqrt{3}$ & $3\,a\sqrt{3}$, scribo, additis $5\,a$ & $3\,a$, pro summa $8\,a\sqrt{3}$; & $2\,a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote sublatis $3\,a$ ex $5\,a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo a & b, erit summa $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc est, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit summa $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$,

& dif-

& differentia $\frac{pzz \sim aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim Pag.173, lin.18. summa $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a\sim b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit summa $8\sqrt{xx+12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $\overline{2x\sim 2}\sqrt{xx+12}$.

Quòd si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Vt si addendum sit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Vt ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, &

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæſitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit ſi ad multiplicandum proponatur $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc eſt, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd ſi datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſas, & producto præfigere commune ſignum radicale. Si verò ſigna radicalia diverſa fuerint, reducenda priùs ſunt ad idem ſignum, ſicut ſuperiùs eſt oſtenſum, & deinde operandum, ut jam dictum eſt. Vt, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ ſignum $\sqrt{\ }$, & fit productum quæſitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter ſi multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem ſignum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam ſcribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit ſi multiplicandum ſit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc eſt, $a+\sqrt{bc}$ in ſe: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$, per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta ſi addantur, fiet productum quæſitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non ſecus ſi multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omiſſis ſcilicet tantùm ſignis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evaneſcunt: hinc productum quæſitum erit $2bb$.

De Diviſione quantitatum ſurdarum.

SI datæ quantitates ſunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra ſignum radicale poſitos, & quod

& quod oritur erit quotiens quæſitus. Vt ad dividendum $\sqrt{75\,aa}$ per $\sqrt{27\,aa}$, hoc eſt, $5\,a\sqrt{3}$ per $3\,a\sqrt{3}$: divido $5\,a$ per $3\,a$, ſeu 5 per 3; eritque quotiens quæſitus $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: diviſis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non ſecus $\sqrt{abcc}$ ſeu $c\sqrt{ab}$ diviſum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et ſic de aliis.

Quòd ſi communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ, & ei quod oritur præfigendum eſt commune ſignum radicale. Vt ad dividendum $\sqrt{a^3b - ab^3}$ per $\sqrt{aa - bb}$: diviſis $a^3b - ab^3$ per $aa - bb$, fit ab; unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem ſi ſigna radicalia fuerint diverſa, reducenda priùs erunt ad idem ſignum, & deinde operatio inſtituenda erit, ut jam dictum eſt. Vt ad dividendum $a^3 + abb$ per $\sqrt{a^4 + aabb}$: multiplicando $a^3 + abb$ in ſe, fit $a^6 + 2\,a^4bb + aab^4$; quare diviſâ $\sqrt{a^6+2a^4bb + aab^4}$ per $\sqrt{a^4 + aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & ſi dividatur $\sqrt{a^4 + 2\,a^3b - 2\,ab^3 - b^4}$ per $a + b$: multiplico primùm $a + b$ in ſe, ut fiat ſub eodem ſigno radicali $\sqrt{aa + 2\,ab + bb}$, quo facto, ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa + 2\,ab + bb}$, fiet quotiens quæſitus $\sqrt{aa - bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviſo quadrato per ſuum latus, oritur latus. Vnde ſi $a^3 + abb$ dividatur per $\sqrt{aa + bb}$, orietur $a\sqrt{aa + bb}$.

Porrò ſi dividendum ſit $a^3 + abb + ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa + bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non ſecus ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter ſi dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab diviſâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæſitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Poſtea ad dividendum $aa - bc$ per $a + \sqrt{bc}$ divido aa per a, & fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3+abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a_4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\text{ in }\overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{\overline{15+2x-xx}}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $\overline{5-x}$ in $\overline{xx+12}$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\text{ in }\overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi ſolet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, eſtque talis: *Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.*

Subductis quadratis partium dati Binomii à ſe invicem, ſi radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratæ ex ſemiſſe ſummæ & differentiæ, per ſignum + vel — dati Binomii connexæ, binæ partes radicis quæſitæ.

Vt ad extrahendum radicem quadratam ex $aa+bc+2a\sqrt{bc}$, ſubtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4+2aabc+bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4-2aabc+bbcc$, cujus radix quadrata $aa-bc$ addita ad majorem partem $aa+bc$, & ab eadem ablata facit ſummam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum ſemiſſes ſunt aa & bc: unde radices quadratæ ſunt a & $\sqrt{bc}$, quæ ſi connectantur per ſignum +, erit radix quæſita $a+\sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm+\frac{pxx}{m}+x\sqrt{4pm}$ erit $m+x\sqrt{\frac{p}{m}}$, *Pag. 182. lin. 13.*

Eodem modo ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab}+2ab$: ſubducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b+2aabb+ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b-2aabb+ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ ſi addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet ſumma $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde ſemiſſium radices quadratæ conſtituunt radicem quæſitam.
$\sqrt{a\sqrt{ab}}+\sqrt{b\sqrt{ab}}$ ſeu $\sqrt{\sqrt{a^3b}}+\sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc}+2\sqrt{abcd}$: etenim ſubtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc+2abcd+bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc-2abcd+bcdd$, cujus radix quadrata eſt $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo ſi addatur & ſubtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit ſumma $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis ſi radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæſita $\sqrt{a\sqrt{bc}}+\sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}}+\sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satius erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Vniversales. Pag. 6.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

QVoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c, &c. pro quæsitis autem posteriores z, y, x, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Vnde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognitas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similesve species:

$$z \propto b, \text{ aut}$$
$$zz \propto -az + bb, \text{ aut}$$
$$z^3 \propto +azz + bbz - c^3, \text{ aut}$$
$$z^4 \propto +az^3 + bbzz - c^3z + d^4, \text{ \&c.}$$

De Reductione per Additionem.

VT si habeatur æquatio inter $z - 3$ & 12, hoc est, si fuerit $z - 3 \propto 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+3$, fiet $z \propto 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt o.

Sic & si fuerit $z - b \propto 0$, addendo utrinque b, fiet $z \propto b$. Aut si ha-si habeatur $b - z \propto 0$, fiet, addendo utrobique z, $b \propto z$. Et si habeatur $zz - aq \propto 0$, erit $zz \propto aq$: ut & si $z^3 - aaq$ æquetur 0, fiet $z^3 \propto aaq$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \propto d^4 - c^3 z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \propto az^3 + bbzz - c^3 z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo — adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo +.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde si fuerit $z + 3 \propto 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \propto 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \propto bb$, subtracto utrinque $+ az$, fiet $zz \propto - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \propto azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \propto azz + bbz - c^3$, subtrahendo utrinque $+ 2c^3$.

Vnde colligitur quantitates signo + adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo —: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

POrrò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \propto 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \propto 15$. Sic & si habeatur $z \propto \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \propto aq$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \propto a$: quoniam, delendo denominatorem $z-b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \propto \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, sublato denominatore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata eſt pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz - bz + bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz - abz + abb}{z}$. Vnde cum æquatio propoſita reducta ſit ad $zz \propto \frac{azz - abz + abb}{z}$, ſi denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem poſterioris partis $\frac{azz - abz + abb}{z}$, fiet $z^3 \propto azz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars eſt fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem poſterioris, & numeratorem poſterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem eſt ac ſi binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipſæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Vbi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad ſimpliciores terminos reduci poſſe. Vt ſi fuerit $\frac{z^3}{zz - aa} \propto \frac{az - aa}{z + a}$: reductis denominatoribus $zz - aa$ & $z + a$ ad $z - a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z - a} \propto \frac{az - aa}{1}$. ac proinde, ſi multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \propto azz - 2aaz + a^3$. Similiter ſi habeatur $\frac{aaz - bbz}{z + b} \propto \frac{a^3 - abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz - bbz$ & $a^3 - abb$ ad z & a, habebitur $\frac{z}{z + b} \propto \frac{a}{z}$, ubi ſi per crucem multiplicetur, fiet $zz \propto az + ab$. Non ſecus ſi habeatur $\frac{azz - bzz}{bb - bz} \propto \frac{aa - ab}{b}$: cum numeratores $azz - bzz$ & $aa - ab$ reduci poſſint ad zz & a, ut & denominatores $bb - bz$ & b ad $b - z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b - z} \propto \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exſurget $zz \propto - az + ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Vt ſi habeatur æquatio inter $\frac{az^3 - bz^3}{zz + az + aa}$ & $ab - bb$: ſubſtituta enim unitate pro denominatore ipſius integri $ab - bb$, cum $az^3 - bz^3$ & $ab - bb$ reduci poſſint ad z^3 & b, erit æquatio talis

z^3

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \propto 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \propto aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.z} \propto \sqrt{C.aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \propto aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

Postea si detur $zz \propto 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z, oriatur $z \propto 4$. Sic & si habeatur $z^4 \propto az^3 + bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \propto az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \propto 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \propto 4$. Eodem modo si fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \propto b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \propto bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a - b$, $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si proponatur $azz + bzz \propto abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a + b$, orietur $zz \propto bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \propto aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $zz \propto az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $zz \propto \frac{a}{+b} z + \frac{abc}{a-b}$. Pag. 149. lin. 27.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Vt si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbzz$ & $-abz^3 + 2abbzz - 2ab^3z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz - abz + abb$, orietur $zz \propto -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $zz \propto 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, proveniat

veniat

veniat $z \propto 5$. Sic & si fuerit $z^3 \propto 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \propto 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \propto aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \propto a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \propto aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \propto a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx
Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz-3aa}{4}} \propto \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}} \propto \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \propto \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \propto \frac{z^4-9a^4}{4}$. Vbi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \propto \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \propto 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \propto 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque $z^4 \propto \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Vbi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \propto \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \propto \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem inſtitui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates ſurdas; & reductionem per diviſionem, tam ad deprimendas dimenſiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & ſimpliciſſimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis conſtantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæſitam ex data æquatione inveniendam utiles eſſe poſſint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta ſufficiant.

FINIS.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

AD LECTOREM.

CÆterùm ne locus ſuperſtes hujus paginæ vacuus relinqueretur, viſum fuit hoc loco ſimul indicare ſphalmata, quæ in Exercitationibus noſtris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emiſimus, fuerunt commiſſa, ac poſtmodum à nobis recognita: ut, iis ſequenti modo correctis, Lectoris ſtudium in conſimili argumento abſque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæſtio*. p. 163. l. penult. lege *quæſiverim*. p. 193. l. 12. lege *nullæ omnino*. p. 228. l. 3 lege fit $zz - 2aa$. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *deſcriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod eſt rectum*. p. 327. l. 4 lege *Oſtenſo*. ibid. l. antep. lege *ipſa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege ε C, ε F. p. 361. l. 1. lege *ad E, ita ut A E ſit æqualis AB*. p. 372. l. antep. poſt *Quod*, & p. 393. l. 9 poſt *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22 lege *in locum x x*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 ſunt ſubſtituendæ, & vice verſâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE
ÆQVATIONVM

Natura, Conſtitutione, & Limitibus

Opuſcula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Bleſenſi Conſiliario Regio;

Abſoluta verò, & poſt mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,
Medicinæ & Mathematum in Regia Academia
Hafnienſi Profeſſore publico.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

SVMMO MVSARVM

MÆCENATI

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO,

IOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TVNDBYHOLM, &c.

EQVITI AVRATO,

REGNI DANIÆ SVMMO AVLÆ MAGISTRO,

PRINCIPI SENATORI,

REGIÆ MAIESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI

HOC

SPECIMEN ANALYTICES

NOVO ARGVMENTO

CONSECRAT

OBSEQVIVM.

Quod

QVod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram onerаſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii, qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectusque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modo ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæ-

piùs

piùs favoris, quàm virtutis esse beneficium? unde patrono & defensore iis opus est, sub cujus auspiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum fastigium superest, hoc tamen uno modo crescere potest. Te ergo præsertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut literas ſuſciperes, attribuas, ut ſuſceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, ſed quale poſſum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum eſt famâ & acclamatione quantum Aſtronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renaſcentis Aſtronomiæ gratia debetur. Et ſi propoſito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem conſtitues etiam Algebram, hoc eſt, Matheſin Vniverſalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique feliciſſimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum eſſe, ſupra humanum ſolatium recreabor.

Ill^{æ} & Exc^{mæ} D^{ni} V^{æ}

Hafniæ, Anno cIↃ IↃ CLVII.

Deditiſſimus

ERASMIVS BARTHOLINVS, Medicinæ & Mathematum Profeſſor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione
Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAVDIVM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

Quamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibique, Vir Clarissime, exponere constitui, ea, quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset, D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tantum laudandus, in quantum intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctissimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alter-

alterutri de Analyticis sermocinari volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat. Unde non obscurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac studiorum eminens, a quo, si publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè sperari posset. Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi obstare, occupationes tam publicas quàm privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum suarum meditationum necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & significare conscriptam esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum proposito moram afferre diutiùs posset. Quibus valde recreatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed, cùm Arthriticis doloribus plus solito, lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reliquas Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense transire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea verò studia iteratò

ratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundem esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gasti-

nensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Analyticis disserentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego, cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis ratio-

nem

nem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ solicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.

PRÆFATIO.

DEcreveram in publicum edere hoſce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo inſequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum graviſſimo ad oculos defluxu, oculorum uſu privatus fui. Vnde propoſito planè deſtitiſſem, niſi D. Eraſmius Bartholinus operam mihi ſuam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione ſepulta jacerent, obtuliſſet. Ejus igitur auxilio hoc opus compoſui, ad quod intelligendum ſuppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes verſatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctiſſimis Franciſci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheſeos Vniverſalis, ſeu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATVS
DE
NATVRA
ET
CONSTITVTIONE ÆQVATIONVM.

DE
NATVRA ÆQVATIONVM.

CAPVT I.

MVltò faciliùs inveniemus Naturam & Conſtitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum ſimilibus ſeu ejuſdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præſtitit Viëta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita diſponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipſos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimenſiones deſcendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipſam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimenſionum exiſtens nullis aliis quantitatibus adficitur; ſecundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimenſione minor eſt; tertium in quo duabus; & ſic deinceps, uſque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, aſteriſco complebimus, quæ tum ſub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio tranſpoſitionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ ſcripta & commentata ſunt in Geometriam Renati des Cartes, nota eſt methodus cognoſcendi, quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione: nimirum, poſſe Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes ſignorum continuæ adfuerint, & quoties eadem ſigna ſe invicem ſequuntur immutata, tót poſſe reperiri falſas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes ſimiles eſſe dicimus ſeu ejuſdem formæ, quando in utraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in utraque ſimiliter ſunt affecti; & ſi in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque abſit in altera. Nam cùm ſimiles ſunt Æquationes, eandem habebunt conſtitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio ſeu collatio ſingulorum terminorum unius cum ſingulis terminis correſpondentibus alterius.

Capvt II.

De natura & conſtitutione Æquationum Quadratarum, ſeu duarum dimenſionum.

Qvando æquationes hæ ſunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas ſequentes:

$$xx + lx - mm \infty 0$$
$$xx - lx - mm \infty 0$$
$$xx - lx + mm \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad intelligendam naturam & conſtitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$ ſequens æquatio: $xx \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} x - bc \infty 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propoſitarum $xx + lx - mm \infty 0$. & per conſequens, binæ hæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum ſecundorum habebimus $c - b \infty l$. Vnde diſcimus, l eſſe differentiam inter falſam radicem c & veram b; &, cognitâ falsâ c, veram b eſſe æqualem ipſi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falſam c eſſe æqualem ipſi $b + l$.

Præterea, ex comparatione poſtremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Vnde ſequitur mm eſſe æquale rectangulo ſub vera & falſa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b æqualem eſſe $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falſam c æqualem eſſe $\frac{mm}{b}$.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda æquatione propoſita formetur rurſus per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$, æquatio $xx \begin{matrix} -b \\ +c \end{matrix} x - bc \infty 0$. In qua ſi ſupponamus b majorem quàm c, erit ipſa ejuſdem formæ cum ſecunda propoſita $xx - lx - mm \infty 0$. Et per conſequens duæ illæ æquationes erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-latione secundorum terminorum $c - b \propto - l$, vel $l \propto b - c$. Vnde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c; & si cognita fuerit falsa c, erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b, falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \propto bc$. Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse $\propto$ $\frac{mm}{b}$.

3 *Propositio.*

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x - c \propto 0$, æquationem sequentem $xx \begin{array}{l} - bx \\ - c \end{array} + bc \propto 0$, & habebit eandem formam atque proposita tertia $xx - lx + mm \propto 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \propto l$. Vnde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c, est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \propto bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \propto 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \propto 0$, & $x + m \propto 0$. Vnde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m.

CAPVT III.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes reducuntur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \propto 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \infty o$ & $x - b \infty o$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \infty o$. Supposito autem cc majori quàm bb,
$+ cc$
ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \infty o$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \infty mm$. Vnde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \infty o$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$. Vnde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty o$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \infty o$ & $x - b \infty o$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \infty o$. Supposito autem bb majori quàm cc, ha-
$+ cc$
bebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \infty o$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \infty mm$. Vnde constat, cc esse æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty o$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * \begin{array}{l} -bbx \\ -cc \end{array} + bcc \infty 0$, eandem habens formam cum tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Vnde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Vnde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per consequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPVT IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ +c \end{array} * - bbc \infty 0$. Et suppositâ c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + bb + bl$ ꝏ o duas reliquas radices reſpicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur n^3 ꝏ bbc. unde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{b}x + \frac{n^3}{b}$ ꝏ o duas reliquas radices concernere.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc$ ꝏ o & $x - b$ ꝏ o hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array} xx * - bbc$ ꝏ o. Et ſuppoſitâ b majore quàm c erit ejuſdem formæ cum ſecunda propoſitarum $x^3 - lxx * - n^3$ ꝏ o, adeoque erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $b - c$ ꝏ l. Vnde conſtat, c eſſe æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} x + bb - bl$ ꝏ o duas reliquas radices reſpicere.

Porrò per comparationem poſtremorum terminorum habebimus n^3 ꝏ bbc. Vnde ſequitur c eſſe æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, ſi vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b}$ ꝏ o duas reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione formemus ex duabus $xx - cx - bc$ ꝏ o & $x - b$ ꝏ o hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} xx * + bbc$ ꝏ o, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propoſitarum $x^3 - lxx * + n^3$ ꝏ o, & per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c + b$ ꝏ l. Vnde diſcimus, quòd c æquetur $l - b$; &, ſi vera radix b ſit cognita, quòd æquatio $xx \begin{array}{l}-b\\-l\end{array} x - bb - bl$ ꝏ o ad duas reliquas radices inveſtigandas referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde ſequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inveniendis inſervire.

Capvt V.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$, æquatio ſequens $x^3 \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} xx \begin{array}{l} +dd \\ +bc \end{array} x - bdd \infty 0$. atque eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc eſt, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c eſt inventa æquari $l - b$. Vnde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} x + mm + bb - bl \infty 0$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde conſtat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd \propto o$ per $x-b \propto o$ æquatio hæc
$$\begin{array}{llll} x^3 & -bxx & -bcx & -bdd \propto o. \\ & +c & +dd & \end{array}$$
& suppositâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quàm propositio secunda $x^3+lxx-mmx-n^3 \propto o$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c-b \propto l$, hoc est, $c \propto l+b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd-bc \propto -mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd \propto bl+bb-mm$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{ll} xx & +lx+bb+bl-mm \propto o \\ & +b \end{array}$$
duabus reliquis radicibus investigandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd \propto n^3$. Vnde sequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc
$$\begin{array}{ll} xx & +bx+\frac{n_3}{b} \propto o \\ & +l \end{array}$$
reliquis duabus inservituram.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd \propto o$ per $x-b \propto o$ eadem æquatio
$$\begin{array}{llll} x^3 & -bxx & -bcx & -bdd \propto o. \\ & +c & +dd & \end{array}$$
Et suppositâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum tertiâ propositarum $x^3-lxx-mmx-n^3 \propto o$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c-b \propto -l$, hoc est, $c \propto b-l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd-bc \propto mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c, erit $dd \propto bb-bl-mm$. Vnde constat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio
$$\begin{array}{lll} xx+bx & +bb & \propto o \\ -l & -bl & \\ & -mm & \end{array}$$
ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione postremorum terminorum, habebitur $bdd \infty n^3$. Vnde sequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \underset{-l}{+bx} + \frac{n^3}{b} \infty o$ ad duas reliquas quærendas esse utilem.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd \infty o$ per $x-b \infty o$ eadem æquatio $x^3 \underset{+c}{-bxx} \underset{+dd}{-bcx} -bdd \infty o$. Et suppositâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejusdem formæ ac quarta propositio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty o$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c-b \infty l$, seu $c \infty l+b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd-bc \infty mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \infty bb+bl+mm$. Vnde constat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \underset{+l}{+bx} +bb+bl+mm \infty o$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. Vnde sequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \underset{+l}{+bx} + \frac{n^3}{b} \infty o$ ad indagandas duas reliquas adhiberi posse.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione fiat ex multiplicatione $xx-cx-dd \infty o$ per $x-b \infty o$ æquatio $x^3 \underset{-b}{-cxx} \underset{+bc}{-ddx} +ddb \infty o$. Et supposito bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum quinta propositarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty o$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum, habebimus $l \infty c+b$, vel $c \infty l-b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc-dd \infty mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \infty bl-bb-mm$. Vnde discimus, cognitâ radice verâ b, æqua-

æquationem hanc $xx \begin{array}{l}-lx\\+b\end{array} - bl + bb + mm \infty o$ duabus reliquis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Vnde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}-lx\\+b\end{array} - \frac{n^3}{b} \infty o$ duabus reliquis inveniendis inservire.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty o$ & $x - b \infty o$ æquatio $x^3 \begin{array}{l}+cxx\\-b\end{array} \begin{array}{l}-ddx\\-bc\end{array} + ddb \infty o$. Et, suppositâ c majori quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty o$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+lx\\+b\end{array} \begin{array}{l}-mm\\+bl\\+bb\end{array} \infty o$, pro duabus reliquis inveniendis usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{array}{l}+lx\\+b\end{array} - \frac{n^3}{b} \infty o$ ad investigandas duas reliquas utilis erit.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty o$ & $xx + cx - dd \infty o$ æquatio $x^3 \begin{array}{l}+cxx\\-b\end{array} \begin{array}{l}-ddx\\-bc\end{array} + ddb \infty o$. Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty o$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

$l \infty b -$

$l \infty b - c$, seu $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \infty bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bb + bl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{-l} x - mm + bb - bl \infty 0$ ad inveniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \infty n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $xx + \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{-l} x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPVT VI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

HVjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 * * + \genfrac{}{}{0pt}{}{c^3}{-b^3} x - bc^3 \infty 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \infty 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \infty bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas poſſe uſurpari.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione fiat ex duabus $x^3+bxx+bbx+c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * * \begin{array}{l} +c^3 \\ -b^3 \end{array} x - bc^3 \infty 0$. Et, ſi ponatur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque ſecunda propoſitarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$, & conſequenter erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty - n^3$, hoc eſt, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Vnde cognoſcimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices reſpicere. Porrò, comparatis inter ſe terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Vnde ſequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * * \begin{array}{l} -c^3 \\ -b^3 \end{array} x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem formam atque tertia propoſitarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc eſt, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas inveſtigandas adhiberi poſſe. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Vnde ſequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3+bxx+bbx-\frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas eſſe utilem.

CAPVT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

ÆQuationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 * * - b^3 c \infty 0.$ Suppositâ vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} +b \\ +l \end{array} xx \begin{array}{l} +bl \\ +bb \end{array} x + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3 c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{bb} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l} +c \\ -b \end{array} x^3 * * - b^3 c \infty 0$. Et supponendo b superare ipsam c, habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + c \infty -l$, hoc

 est,

est, $c \infty b - l$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 \begin{smallmatrix}+b\\-l\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+bb\\-bl\end{smallmatrix} x + b^3 - bbl \infty 0$ ad tres reliquas investigandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \infty b^3 c$. Vnde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tribus reliquis inservire.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^4 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} x^3 * * + b^3 c \infty 0$ & erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-bl\\+bb\end{smallmatrix} x - bbl + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire. Porrò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \infty b^3 c$, & per consequens $c \infty \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{bb} xx - \frac{p^4}{bb} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

Ca-

CAPVT VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

ÆQuationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mm\,xx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 * & - ccxx & + d^3x & - bd^3 \infty 0. \\ & - bb & + bcc & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Vnde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & + n^3 & \infty 0 \\ & - m & + b^3 & \\ & & - bmm & \end{array}$$

tribus reliquis indagandis inservire.

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & + d^3x & - d^3b \infty 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$
Supposito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 * + mm xx - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \infty -n^3$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + bmm \infty 0, \\ & + bb & + b^3 \\ & & - n^3 \end{array}$$
tribus reliquis investigandis inservire.

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b, æquationem hanc
$$\begin{array}{ll} x^3 + bxx + mmx & + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad\quad\quad + bb & \end{array}$$
ad tres reliquas indagandas posse usurpari.

3 *Propositio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio
$$\begin{array}{llll} x^4 * & + ccxx & + d^3x & - d^3b \infty 0. \\ & - bb & - ccb & \end{array}$$
Et, supposito bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Vnde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc est, substituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, si cognita sit radix vera b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty 0 \\ & - m^2 & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremo, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto b\,d^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + b\,x\,x + b\,b\,x + \frac{p^4}{b} \propto 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - m\,m$
ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - b\,x\,x + cc\,x + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * + cc\,xx + d^3 x - d^3 b \propto 0.$
$\qquad\qquad\qquad - bb \quad - ccb$
Et supposito $c\,c$ majore quàm b, ac d^3 majore quàm $c\,c\,b$, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mm\,xx + n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $m\,m \propto c\,c - b\,b$, hoc est, $c\,c \propto m\,m + b\,b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - c\,c\,b$, hoc est, restituendo valorem $c\,c$ inventum, erit $d^3 \propto b^3 + b\,m\,m + n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + b\,xx + mm\,x$
$\qquad\qquad\qquad + b\,b$
$+ b^3 \propto 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis
$+ b\,m\,m$
$+ n^3$
ultimis terminis, erit $d^3\,b \propto p^4$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + b\,x\,x + m\,m\,x + \frac{p^4}{b} \propto 0$
$\qquad\qquad\qquad + bb$
ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + b\,xx - cc\,x - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * - c\,c\,x\,x - d^3\,x + d^3\,b \propto 0$. Et
$\qquad\qquad\qquad - b\,b \quad + bcc$
supposito $b\,c\,c$ majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - m\,m\,x\,x + n^3\,x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc + bb$,

hoc

hoc eſt, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}-mm\\+bb\end{array} x \begin{array}{l}-bmm\\+b^3\\+n^3\end{array} \infty\, 0$ reliquis tribus quærendis inſervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \infty p^4$. Vnde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}-mm\\+bb\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty\, 0$ ad tres reliquas inveſtigandas poſſe adhiberi.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty\, 0$ & $x - b \infty\, 0$ hanc æquationem $x^4 * \begin{array}{l}+cc\\-bb\end{array} xx \begin{array}{l}-d^3\\-ccb\end{array} x + d^3 b \infty\, 0$. & ſupponendo cc majus quàm bb, habebit ipſa eandem formam cum ſexta propoſitarum $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty\, 0$, ac per conſequens erit utraque ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc eſt, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc eſt, reſtituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Vnde patet, datâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mm\\+bb\end{array} x \begin{array}{l}-n^3\\+bmm\\+b^3\end{array} \infty\, 0$ ad trium reliquarum inveſtigationem poſſe uſurpari.

Poſtremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx \begin{array}{l}+mm\\+bb\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty\, 0$ ad reliquas tres quærendas eſſe adhibendam.

7 *Pro-*

7 *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3+bxx+ccx-d^3 \infty 0$ & $x-b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * + ccxx - d^3x + bd^3 \infty 0$. Et sup-

$-bb \quad -bcc$

posito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx - n^3 \infty 0$ ad reliquas tres

$-mm \quad +b^3$

$-bmm$

investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x - \frac{p^4}{b} \infty 0$

$-m^2b$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPVT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc $\begin{array}{l} x^4 - c x^3 + ddxx * - bbdd \infty 0; \\ \quad\;\; - b \quad\; + bc \end{array}$ habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & - lxx & + mmx & + bmm & \infty\ 0 \\ & - b & - bl & - bbl & \\ & & - bb & - b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres investigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $\begin{array}{l} x^4 + cx^3 + ddxx \\ \quad\;\; - b \quad\; - bc \end{array}$ $* - ddbb \infty 0$. Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quam dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $- mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + lxx & + blx & + bbl & \infty\ 0 \\ & + b & + bb & + b^3 & \\ & & - m^2 & - bm^2 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera

radix

radix b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+bl\\+bb\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty\, o$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty\, o$ & $x-b \infty\, o$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \infty\, o$. Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4-lx^3-mmxx*-p^4 \infty\, o$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \infty\, c-b$, hoc est, $c \infty\, b-l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty\, dd-bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty\, bb+bl-mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-m^2\end{array} x \begin{array}{l}+bbl\\+b^3\\-bm^2\end{array} \infty\, o$ tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\, bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} x + \frac{p^4}{b}$ pro tribus reliquis usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3+cxx+ddx+bdd \infty\, o$ & $x-b \infty\, o$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx * -bbdd \infty\, o$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4+lx^3+mmxx*-p^4 \infty\, o$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \infty\, c-b$, hoc est, $c \infty\, l+b$. Deinde, de, conferendo rertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & + bmm & \infty\ 0 \\ \quad + b & + bl & + bbl & \\ & + bb & + b^3 & \end{array}$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad + l & + bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 & - ddxx & * + bbdd & \infty\ 0. \\ \quad - b & + bc & & \end{array}$$

Et supponendo bc majus quàm dd, erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\ 0 \\ \quad + b & + bb & + bmm & \\ & + mm & + b^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad + b & + bb & & \\ & + mm & & \end{array}$$

pro tribus reliquis investigandis inservire poterit.

6 Pro-

6 *Propositio.*

Pro ſexta propoſitarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & * & + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & & \end{array}$$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitio, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & + b & + bl & + bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tres reliquas radices reſpicere.

Poſtremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bbdd$, ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & + b & + bl & \\ & & + bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit adhibenda.

7 *Propositio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & * & + bbdd \infty 0. \\ & - b & - bc & & \end{array}$$

Suppoſitâ autem b majore quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & - bmm \infty 0 \\ & - l & - bl & - bbl \\ & & + bb & + b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire. Denique, comparando poſtremos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$; ac per conſequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ - l & - bl & & \\ & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

CAPVT X.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, tertio termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad ſeptem ſequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0.$$

I *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, formemus, ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 - cx^3 * & + d^3 x & - bd^3 & \infty\ 0 \\ - b & + bbc & & \end{array}$$

& habebit ipſa eandem formam atque prima propoſitio $x^4 - lx^3 * + n\ \ x - p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem inventum c, erit $d^3 \infty n^3 - bbl + b^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & + n^3 & \infty\ 0 \\ + b & + bb & + b^3 & \\ & & - bbl & \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi poſſe. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto b d^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & -lxx & -blx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres erit referenda.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \propto 0 \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque ſecunda propoſitio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus, $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto bbl + b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl & \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 & \\ & & & -n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire. Poſtremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac per conſequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & +lxx & +blx & +\frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & +b & +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas erit utilis.

3 *Propoſitio.*

Pro tertia propoſitione fiat ex duabus, $x + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \propto 0 \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppoſitis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipſa eandem formam atque tertia propoſitio $x^4 + lx * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc eſt, reſti-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty\, lbb + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + lbb & \infty\ 0 \\ \quad +b & \quad +bb & \quad +b^3 & \\ & & \quad -n^3 & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\, d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad +b & \quad +bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + c\,x^3 & * & + d^3 x & - d^3 b & \infty\ 0. \\ \quad\ -b & & -bbc & & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty\ 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \infty\, c - b$, hoc est, $c \infty\, b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \infty\, d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty\, n^3 + b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + n^3 & \infty\ 0 \\ \quad +l & \quad +bl & \quad +b^3 & \\ & & \quad +bbl & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty\, d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad +l & \quad +bl & & \end{array}$$

tribus reliquis inserviet.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - c\,x^3 & * & - d^3 x & + b d^3 & \infty\ 0. \\ \quad\ -b & & +bbc & & \end{array}$$

supponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipsa eandem formam quinta atque quinta propoſitio $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc eſt, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc eſt, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, ſubſtituto nempe valore c invento. Vnde patet, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -bbl \infty 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & +n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas inveſtigandas eſſe adhibendam.

6 *Propoſitio.*

Pro ſexta propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, æquatio

$$\begin{array}{lll} x^4 & -cx^3 * & +d^3 x + bd^3 \infty 0. \\ & -b & -bbc \end{array}$$

Suppoſitâ autem c majore quàm b, habebit ipſa eandem formam atque ſexta propoſitarum $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt; reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & -n^3 \infty 0 \\ & +b & +bb & +bbl \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde ſequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad reliquas tres eſſe referendam.

7 Propositio.

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} +cx^3 \\ -b \end{array} * \begin{array}{l} -d^3x \\ -bbc \end{array} + bd^3 \infty 0.$$

Supponendo autem b majorem quàm c, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitarum $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque ſecundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc eſt, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ -l \end{array} \begin{array}{l} +bbx \\ -bl \end{array} \begin{array}{l} -n^3 \\ -bbl \\ +b^3 \end{array} \infty 0$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde conſtat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$x^3 \begin{array}{l} +bxx \\ -l \end{array} \begin{array}{l} +bbx \\ -bl \end{array} - \frac{p^4}{b} \infty 0$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

Caput XI.

De natura & conſtitutione Æquationum quatuor dimenſionum, in quibus nullus terminus deeſt.

Reducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim ſequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$

1 *Propoſitio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, dignoſcendâ fiat ex duabus hiſce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & -f^3x & +bf^3 \propto 0, \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propoſitarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc eſt, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 + bbl - bmm - b^3$. Vnde conſtat, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -n^3 \propto 0 \\ & +b & +bb & -bbl \\ & & -bl & +bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

2 *Propoſitio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \propto 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

 Sup-

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto bbl - b^3 - bmm - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - l\,xx & + mm\,x & + n^3 & \propto o \\ + b & + bb & + b^3 & \\ & - bl & + bmm & \\ & & - bbl & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - l\,xx & + mm\,x & - \frac{p^4}{b} & \propto o \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto o$, & $x - b \propto o$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - c\,x^3 & - dd\,xx & - f^3\,x & + bf^3 & \propto o \\ - b & + bc & + bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \propto -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \propto -n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 + bbl + bmm - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æqua-

æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & -n^3 \infty 0 \\ & +b & -mm & -bbl \\ & & +bb & -bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \infty 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm + bbl - b^3 - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -bmm \infty 0 \\ & +b & -bl & -bbl \\ & & +bb & +b^3 \\ & & & +n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus, $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b$, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^4 + cx^3 & + ddxx & - f^3x & \\ \quad\ - b & - bc & - bdd & \\ & & & + bf^3 \propto 0. \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \propto f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + mmb - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + mmx & - n^3 \propto 0 \\ \quad + b & - bl & - m^2b \\ & - bb & + bbl \\ & & + b^3. \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lll} x^3 + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ \quad + b & - bl & \\ & - bb & \end{array}$$
ad tres reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{llll} x^4 - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 \propto 0. \\ \quad + c & + dd & - f^3 & \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto - mm$, hoc est, substituto valore c in-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc eſt, reſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Vnde conſtat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \infty\, 0 \\ \quad + b & + bb & - bmm & \\ & - mm & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ \quad + b & + bb & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

7 *Propoſitio.*

Pro ſeptima propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & - ddxx & - f^3 x & + bf^3 & \infty\, 0. \\ \quad - b & - bc & + bdd & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque ſeptima propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc eſt, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Vnde ſequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\, 0 \\ \quad + l & + bb & + b^3 & \\ & + bl & + bbl & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquatio-tionem $\begin{array}{llll} x^3 + b\,xx & - mm\,x & - \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + l & + bb & & \\ & + bl & & \end{array}$ ad reliquas tres esse referendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$, hæc æquatio $\begin{array}{lllll} x^4 - c\,x^3 & + d\,d\,x\,x & + f^3\,x & - f^3\,b & \infty\ 0. \\ - b & + b\,c & & - bdd & \end{array}$

Supposito autem $b\,d\,d$ majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - l\,x^3 + m\,m\,x\,x - n^3\,x - p^4 \infty\ 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $m\,m \infty d\,d + b\,c$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d\,d \infty m\,m - b\,l + b\,b$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - b\,d\,d \infty - n^3$, hoc est, substituto valore $d\,d$ invento, erit $f^3 \infty b\,m\,m - b\,b\,l - n^3 + b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - l\,x\,x & + m\,m\,x & + b\,m\,m & \infty\ 0 \\ + b & + b\,b & + b^3 & \\ & - b\,l & - b\,b\,l & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty b\,f^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $\begin{array}{llll} x^3 - l\,x\,x & + m\,m\,x & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ + b & + b\,b & & \\ & - b\,l & & \end{array}$ ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$, hæc æquatio $\begin{array}{lllll} x^4 - c\,x^3 & + d^3\,x\,x & + f^3\,x & - f^3\,b & \infty\ 0. \\ - b & + b\,c & - bdd & & \end{array}$

Supposito verò f^3 majore quàm $b\,d\,d$, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - l\,x^3 + m\,m\,x\,x + n^3\,x - p^4 \infty\ 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +n^3 \\ & +b & +bb & +bmm \\ & & -bl & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & +\frac{p^4}{b} \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array} \propto 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 Propositio.

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \\ & -b & -bc & -bd^2 & \end{array} \propto 0.$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 \\ & -l & -bl & -bbl \\ & & -m^2 & -bmm \\ & & & -n^3 \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad -l & -bl & & \\ & +mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

11 *Propositio.*

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^4 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 & \infty\ 0. \\ \quad -b & -bc & +ddb & & \end{array}$$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb - b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & + n^3 & \infty\ 0 \\ \quad -l & -bb & +bbl & \\ & +bl & -mmb & \\ & & -b^3 & \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad -l & -bb & & \\ & +bl & & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

12 *Propositio.*

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \infty\ 0. \\ \quad -b & -bc & -bdd & & \end{array}$$

Suppo-

Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque duodecima propoſitio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens erunt ejuſdem naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo ſecundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd - bc$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl + b^3 - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ & + l & + bl & + bbl & \\ & & + mm & + bm^2 & \\ & & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Denique, comparatis poſtremis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per conſequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^3 & + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ & + l & + bl & & \\ & & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propoſitio.*

Pro decima tertia propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \propto 0 \\ & - b & - bc & - bdd & & \end{array}$$

Suppoſitis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipſa eandem formam atque decima tertia propoſitio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatiſque ſecundis terminis, habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc eſt, reſtituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n + b^3 + bbl - bmm$. Vnde conſtat, cognitâ

verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -bbx & +b^3 & \infty\ 0 \\ & +l & -bl & +bbl & \\ & & +m^2 & +n^3 & \\ & & & -bm^2 & \end{array}$$
reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty\ p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &,cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & -bbx & +\frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & +l & -bl & & \\ & & +mm & & \end{array}$$
ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$ hanc æquationem
$$\begin{array}{llllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b & \infty\ 0. \\ & -b & -bc & -bdd & & \end{array}$$
Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty\ 0$,ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \infty\ c - b$, hoc eſt, $c \infty\ l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \infty\ bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \infty\ b^3 + bbl - bmm - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 & \infty\ 0 \\ & +l & +bl & +bbl & \\ & & -m^2 & -bm^2 & \\ & & & -n^3 & \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty\ f^3 b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b,hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ & +l & +bl & & \\ & & -m^2 & & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

15 *Pro-*

15 *Propositio.*

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty\ 0$ & $x - b \infty\ 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & - ddxx & + f^3x & - bf^3 \infty\ 0. \\ \quad\ - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty\ 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \infty\ c - b$, hoc est, $c \infty\ l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty\ dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty\ mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \infty\ f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty\ b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \infty\ 0 \\ \quad\ + l & + bl & + bbl & \\ & - mm & + n^3 & \\ & & - bm^2 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty\ f^3 b$, ac per consequens $f^3 \infty\ \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \infty\ 0 \\ \quad\ + l & + bl & & \\ & - mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA
hîc in genere nonnulla.

1. Notandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, pa-

tebit, mutatis ſignis terminorum locorum parium, ut 2[di], 4[ti], &c. non mutatis ſignis reliquorum, (comprehendendo ſub terminorum numero etiam locos vacantes:) ſecundum terminum ſemper æquari ſummæ radicum æquationis, affectarum cum ſuis ſignis + & —; tertium verò; ſummæ productorum earundem radicum, cùm ſingulæ binæ in ſe invicem ducuntur: & quartum, ſummæ productorum multiplicationis, factæ ex ſingulis ternis, atque ſic deinceps.

Vnde ſequitur, deficiente ſecundo termino, ipſam falſam ſummamvè falſarum radicum æquari ipſi veræ vel verarum ſummæ; &, deficiente tertio termino, productum vel ſummam productorum ex binis, per ſignum + vel — deſignatorum, æquari ſummæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario ſigno afficitur, & ſic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \propto 0$ per $x + c \propto 0$ hæc æquatio $xx \begin{matrix}-b\\+c\end{matrix} x - bc \propto 0$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini ac retento ſigno tertii, habebimus $xx \begin{matrix}+b\\-c\end{matrix} x - bc \propto 0$. Vnde apparet, $b - c$ eſſe ſummam radicis veræ $+b$ & falſæ $-c$; & $-bc$ eſſe productum ex multiplicatione falſæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{matrix}-b\\-c\end{matrix} x + bc \propto 0$, ex multiplicatione $x - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$. Quare mutatis ſignis ſecundi termini, retento ſigno tertii, habebitur $xx \begin{matrix}+b\\+c\end{matrix} x + bc \propto 0$. Vnde apparet, $+b+c$ eſſe ſummam duarum verarum radicum, & $+bc$ eſſe productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \propto 0$, $x - c \propto 0$, & $x + f \propto 0$ æquatio ſequens: $x^3 \begin{matrix}-b\\-c\\+f\end{matrix} xx \begin{matrix}+bc\\-bf\\-cf\end{matrix} x + bcf \propto 0$. Quare mutatis ſignis terminorum loco pari poſitorum, relinquendo ſigna reliquorum, habebimus $x^3 \begin{matrix}+b\\+c\\-f\end{matrix} xx \begin{matrix}+bc\\-bf\\-cf\end{matrix} x - bcf \propto 0$. Vnde apparet, ſecundum termi-

num

num $+b+c-f$ eſſe ſummam verarum radicum $+b$, $+c$, & falſæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ eſſe ſummam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout ſingulæ binæ radices in ſe invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ eſſe productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam f æquari ſummæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, ſigno $-$ affecta, æquari producto $+bc$, ſigno $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \propto 0$, $x-c \propto 0$, & $x-d \propto 0$, quæ ſit

$$\begin{array}{llll} x^3 & -b\,xx & +bc\,x & -bcd \propto 0. \\ & -c & +db & \\ & -d & +dc & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum parium, retentis ſignis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{llll} x^3 & +b\,xx & +dc\,x & +bcd. \\ & +c & +bd & \\ & +d & +bc & \end{array}$$

Vnde perſpicimus, ſecundum terminum $+b+c+d$ eſſe ſummam radicum $+b$, $+c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ eſſe productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \propto 0$, $x-c \propto 0$, $x-d \propto 0$, & $x+f \propto 0$ ſequens æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -b\,x^3 & +bc\,xx & -bcd\,x & -bcdf \propto 0. \\ & -c & +bd & +bcf & \\ & -d & +cd & +bdf & \\ & +f & -bf & +cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Vnde mutatis ſignis terminorum, locis paribus conſtitutorum, retentis ſignis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +b\,x^3 & +bc\,xx & +bcd\,x & -bcdf \propto 0. \\ & +c & +bd & -bcf & \\ & +d & +cd & -bdf & \\ & -f & -bf & -cdf & \\ & & -cf & & \\ & & -df & & \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ eſſe ſummam quatuor radicum

æqua-

æquationis; & tertium terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis binis radicibus in ſe invicem ductis; at quartum terminum eſſe ſummam productorum ex ſingulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in ſe invicem ductarum. Patet quoque, deficiente ſecundo termino, falſam radicem $-f$ æquari ſummæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, ſummam productorum ex binis, per $-$ deſignatorum, æquari reliquæ ſummæ productorum ex binis, cum ſigno $+$ affectorum. Non ſecus ſe res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, $x-d \infty 0$, & $x-f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -bx^3 & +bcxx & -bcdx & +bcdf \infty 0. \\ & -c & +bd & -bcf & \\ & -d & +cd & -bdf & \\ & -f & +bf & -cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Et mutatis ſignis locorum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +bx^3 & +bcxx & +bcdx & -bcdf. \\ & +c & +bd & +bcf & \\ & +d & +bf & +bdf & \\ & +f & +cd & +cdf & \\ & & +cf & & \\ & & +df & & \end{array}$$

Atque apparet, ſecundum terminum $+b+c+d+f$ eſſe ſummam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ eſſe ſummam productorum multiplicationis ex ſingulis ternis; ac denique $+bcdf$ eſſe productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in ſe invicem ductarum.

CA-

CAPVT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falſarum datâ.

OPortet mutare ſigna terminorum locorum parium æquationis propoſitæ, ita ut falſæ radices evadant veræ, & veræ falſæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, ſuppoſitâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inſerviens, ſicuti ſupra docuimus. Atque in æquatione ſic inventa mutentur ſigna terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requiſito ſatisfacientem.

Exempli gratiâ. Eſto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty\, 0$ una ex falſis radicibus data, quæ ſit b, atque mutatis ſignis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty\, 0$. Supponatur jam radix falſa b hujus æquationis eſſe vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inſerviens, conſulatur Capitis V. Prop^tio^ 2^da^; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx \begin{array}{l}+lx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty\, 0 \;\&\; xx \begin{array}{l}+bx\\+l\end{array} + \frac{n^3}{b} \infty\, 0.$$

Quocirca mutatis utriuſque æquationis ſignis locorum parium, habebimus

$$xx \begin{array}{l}-lx\\-b\end{array} \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty\, 0 \;\&\; xx \begin{array}{l}-bx\\-l\end{array} + \frac{n^3}{b} \infty\, 0,$$

quarum quælibet quæſito ſatisfaciet.

CAPVT XIII.

Ad tollendum ſecundum terminum Æquationum QVADRATARVM.

$xx + lx - mm \infty\, 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty\, x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty\, 0$.

$$xx - lx - mm \infty\, 0.\ \text{Sit} \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \infty\, x,\\ \\ \frac{1}{2}l - y \infty\, x,\end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{l}zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty\, 0\\ yy * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty\, 0.\end{array}\right.$$

$$xx - lx + mm \propto 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \propto x, \\ \frac{1}{2}l - y \propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{ll} zz * & -\frac{1}{4}ll \propto 0. \\ & +mm \\ yy * & -\frac{1}{4}ll \propto 0. \\ & +mm \end{array}\right.$$

CVBICARVM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & +m^2 & -n^3 \\ & & +\frac{1}{3}lm^2 \\ y^3 * & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & +m^2 & -n^3 \\ & & -\frac{1}{3}lm^2 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & -m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 \\ & & -n^3 \\ y^3 * & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 \\ & & +n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & +mm & +\frac{1}{3}lm^2 \\ & & +n^3 \\ y^3 * & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & +m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 \\ & & -n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{3}l - y \propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & -\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & -m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 \\ & & +n^3 \\ y^3 * & -\frac{1}{3}lly & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 \\ & & -n^3 \end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 \\ & & -n^3 \end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3}l \propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{lll} z^3 * & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 \propto 0. \\ & +m^2 & -\frac{1}{3}lm^2 \\ & & -n^3 \end{array}$$

$x^3 +$

$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \propto 0.\ \text{Sit}\ z - \tfrac{1}{3} l \propto x, \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3 * & - \frac{1}{3} llz & + \frac{2}{27} l^3 \propto 0. \\ & - m^2 & + \frac{1}{3} lm^2 \\ & & + n^3 \end{array}$$

QVADRATO-QVADRATARVM.

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0.\ \text{Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4} l - y \propto x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & - \frac{3}{8} llzz & - \frac{1}{8} l^3 z & - \frac{3}{256} l^4 \\ & + m^2 & + \frac{1}{2} lm^2 & + \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & - n^3 & - \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \\ y^4 * & - \frac{3}{8} llyy & + \frac{1}{8} l^3 y & - \frac{3}{256} l^4 \\ & + m^2 & - \frac{1}{2} lm^2 & + \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & + n^3 & - \frac{1}{4} ln \\ & & & + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4} l - y \propto x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & - \frac{3}{8} llzz & - \frac{1}{8} l^3 z & - \frac{3}{256} l^4 \\ & - m^2 & - \frac{1}{2} lm^2 & - \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & + n^3 & + \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \\ y^4 * & - \frac{3}{8} llyy & + \frac{1}{8} l^3 y & - \frac{3}{256} l^4 \\ & - m^2 & + \frac{1}{2} lm^2 & - \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & - n^3 & + \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto 0.\ \text{Sit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4} l - y \propto x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & - \frac{3}{8} llzz & - \frac{1}{8} l^3 z & - \frac{3}{256} l^4 \\ & + m^2 & + \frac{1}{2} lm^2 & + \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & + n^3 & + \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \\ y^4 * & - \frac{3}{8} llyy & + \frac{1}{8} l^3 y & - \frac{3}{256} l^4 \\ & + m^2 & - \frac{1}{2} lm^2 & + \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & - n^3 & + \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0.\ \text{Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \propto x, \\ \\ \frac{1}{4} l - y \propto x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & - \frac{3}{8} llzz & - \frac{1}{8} l^3 z & - \frac{3}{256} l^4 \\ & - m^2 & - \frac{1}{2} lm^2 & - \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & - n^3 & - \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \\ y^4 * & - \frac{3}{8} llyy & + \frac{1}{8} l^3 y & - \frac{3}{256} l^4 \\ & - m^2 & + \frac{1}{2} lm^2 & - \frac{1}{16} llm^2 \propto 0. \\ & & + n^3 & - \frac{1}{4} ln^3 \\ & & & + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty\, 0.$$ Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 & \infty\, 0. \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}$$

$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty\, 0.$$ Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm & \infty\, 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}$$

$$x^4 + lx^3 - mm\,xx - n^3x + p^4 \infty\, 0.$$ Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}ll\,zz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm & \infty\, 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty\, 0. \text{ Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \infty\, 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 \, y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \infty\, 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty\, 0. \text{ Esto} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{lllll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty\, 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 \; y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \infty\, 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array} \right.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto} \left\{\begin{array}{l} \tfrac14 l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac14 l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & -\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & +\tfrac12 lm^2 & +\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & +\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac38 llyy & +\tfrac18 l^3 y & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac12 lm^2 & +\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto} \left\{\begin{array}{l} \tfrac14 l + z \infty x, \\ \\ \\ \tfrac14 l - y \infty x, \end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & -\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & -\tfrac12 lm^2 & -\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & -\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \\ y^4 * & -\tfrac38 llyy & +\tfrac18 l^3 y & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac12 lm^2 & -\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \tfrac14 l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & +\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac12 lm^2 & +\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \tfrac14 l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & +\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac12 lm^2 & -\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \tfrac14 l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & +\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & -m^2 & +\tfrac12 lm^2 & -\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & -n^3 & +\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \tfrac14 l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{lllll} z^4 * & -\tfrac38 llzz & +\tfrac18 l^3 z & -\tfrac{3}{256} l^4 & \\ & +m^2 & -\tfrac12 lm^2 & -\tfrac1{16} llm^2 & \infty 0. \\ & & +n^3 & -\tfrac14 ln^3 & \\ & & & -p^4 & \end{array}$$

Vnde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualis eſſe $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit; transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno +, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

CAPVT XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

PRo *Cubicis.* Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, tranſmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere quadratum ultimi termini divisum per incognitam quantitatem R esse æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^6 \infty 0$, adeoque divisis per n^3, fiet $n^6 + mmR^4 - R^6 \infty 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 + mmR^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex supra posita suppositione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 - mmR^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione fiet, $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mmp^4R^2 + n^3ppR^3 - p^4R^4 \infty 0$, ac proinde divisis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Suppositâ $x \infty \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{pp} R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1[mo] de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

C A-

CAPVT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3\,mmx - n^3 \propto 0$. Supponamus $zz - zx - mm \propto 0$, hoc est, $x \propto \frac{zz - mm.}{z.}$. Vnde, transformatâ æquatione, habebitur

$$\frac{z^6 - 3\,mmz^4 + 3\,m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3\,mmzz - 3\,m^4}{z} - n^3 \propto 0,$$

hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3\,z^3 - m^6 \propto 0$, vel $z^6 \propto n^3\,z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \propto \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognita autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x \propto \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm \propto 0$, eritque $x \propto \frac{mm - zz}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 \propto 0$, hoc est, $z^6 \propto - n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 \propto - \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x \propto \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$, supponaturque $zz - zx + mm \propto 0$, hoc est, $x \propto \frac{zz + mm}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3\,mmz^4 + 3\,m^4zz + m^6}{z^3}$ $- \frac{3mmzz - 3\,m^4}{z} - n^3 \propto 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 \propto 0$. seu $z^6 \propto n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 \propto \frac{1}{2}n^3 \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$.

Vnde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4} n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPVT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{lll} lxx & -mmx & +n^3 \infty 0, \\ b & -cc & -d^3 \end{array}$ hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l+b}$. in quâ litera x pauciorum est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{ll} mmxx & +d^3x \\ cc & -n^3 \end{array}}{l+b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem

$$\begin{array}{lll} +m^2xx & -n^3x & -ln^3 \infty 0. \\ +cc & +lm^2 & -bn^3 \\ -ll & +bm^2 & \\ -lb & +d^3 & \end{array}$$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Vnde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \propto 0$ & $xx - bx + dd - bb \propto 0$, habebimus $xx - bx \propto cc$, & $xx - bx \propto + bb - dd$, ergo $cc \propto bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ. Vnde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.}\, bbx - \sqrt{dx} \propto 0$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \propto \sqrt{C.}\, bbx$, & $z \propto \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habebimus $c + R - z \propto 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \propto bbx$, & $zz \propto dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \propto z - c$, ideoque $R^3 \propto z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \propto bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \propto 0$, & per consequens $z^3 \propto + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \propto dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \propto dxz$. Ergo erit

$$\begin{array}{lll} 3czz & -3ccz & +c^3 \propto 0, \\ -dx & & +bbx \end{array}$$

& substituto dx loco zz, habebimus

$$\begin{array}{lll} 3cdx & -3ccz & +c^3 \propto 0, \\ -dx & & +bbx \end{array}$$

hoc est, $3ccz \propto 3cdx + bbx$,

$$\begin{array}{lll} dx & & c^3 \end{array}$$

seu $z \propto \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet $zz \propto \frac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc \div dx}$. Sed est quoque $zz \propto dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \propto 3ccdx + ddxx$, hoc est, $\frac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \propto z$. Inventa autem est $z \propto \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \propto 0. \\ & -6bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

FINIS.

Ad Tractatum de Limitibus Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clariſſimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematum in Illuſtri Leidenſi Academia Profeſſori,

ERASMIVS BARTHOLINVS

S. P.

NIſi meminiſſem, quanto majore animo honeſtatis fructus in conſcientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuiſſet, in edendis hiſce opuſculis Analyticis conſilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ ſtudui, eò animus auſus eſt, deliberato conſilio obſequi. Cujus meæ conſcientiæ interpretem, non alium magis deſidero, quàm te, Vir Clariſſime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriæ laudi, indies deſervire, compertum habeo. Venit in mentem ſtudioſum illud otium, quod Leidæ mihi ſemper emolumento, utriſque deinde ſolatio erat, cujusque varietates ſi oratione repetere vellem, prout animo pleræque obverſantur, non dubito quin exiſtimationi hominum diligentia & fides noſtra, & in pleriſque etiam pietas ſubjiceretur. Et licèt neſciam, an ullum *tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, usque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ discessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam simultates varias subierim; non ignoro, quæ futura sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim quia pietas & obsequium causam junxêre. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conscientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quantum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio est. Quod recordantem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc obtrectandi? Plerique se intra perpetuum silentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici,*

nul-

nullam ex meis laboribus sperare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reverentia posterûm, ut censuram erroris non tam reformidem quam inhumanitatis. Sed, ut de pictore nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tuæ potissimùm sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam Æquationum resolutionem, ut reliquas utilitates pertranseam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui fuerint qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, Vir Clarissime, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.

PO-

POSTERIOR TRACTATVS

DE

LIMITIBVS

ÆQVATIONVM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBVS ÆQVATIONVM.

CAPVT I.

De Æquationum Quadratarum seu duarum dimensionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.

PEr transpositionem erit $mm \infty lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviso utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm. Vnde diviso utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Vnde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rursus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde si uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Vnde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x, ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPVT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Vnde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm, & x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisâ utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non sit

ſit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimenſionibus ipſius n^3, ſumendoque loco nn rectangulum ſub duabus quantitatibus; quarum alterutra non ſit ipsâ n minor. Eritque hoc ad ſequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rurſus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per tranſpoſitionem æquationis propoſitæ eſt quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn + mm}$. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ eſſe major quam $\frac{n^3}{mm + nn}$, ſed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Poſſumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimenſionum ipſius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

CAPVT III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rurſus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & conſequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propoſitæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

Prop. 2. $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rurſus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & conſequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per tranſpoſitionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$

major quàm x. Inventa itaque eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm l & n, ſed minor quàm $l+n$. Manifeſtum eſt quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n ſumi poſſit minor trium dimenſionum ipſius n^3, quando x major eſt; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimenſionum ipſius n^3 accipi queat, & ſic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

Prop. 3. $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Eſt etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc eſt, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa eſt itaque radix x æquationis propoſitæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, ſed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonſtratur præterea $nnx + lnx$ majus eſſe quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & conſequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major eſt quàm x.

CAPVT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

Prop. 1. $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc ſi x æquetur ipſi l, erit etiam x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, ſi viciſſim l æquetur ipſi $\frac{n^3}{mm}$ hoc eſt, $lmm \infty n^3$, erit ſimiliter x radix æquationis propoſitæ æqualis ipſi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea ſi $x^3 - lxx$ eſt realis, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & conſequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd ſi autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor ſit, tranſponatur propoſita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem ſupponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx; & si xx minus est quam mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quam mm, & x major quam m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quam n, & nxx majus quam n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mxx majus quam mmx, & nxx majus quam n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quam x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quam l, m, & n; sed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + mmx \propto n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed eſt quoque $x^3 + lxx \propto n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò eſt etiam $lxx + mmx \propto n^3 - x^3$, & conſequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui eſt $x^3 + lxx + mmx \propto n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa eſt radix x æquationis propoſitæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem erit $mmx + n^3 \propto lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rurſus erit $x^3 + n^3 \propto lxx - mmx$, & per conſequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 + mmx \propto lxx - n^3$, & conſequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \propto 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 + lxx \propto mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \propto mmx - lxx$, & per conſequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rurſus erit $lxx + n^3 \propto mmx - x^3$, & conſequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ neceſſariò majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$, ſed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Pro-

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Vnde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, quòd tunc quoque x ipſi $\frac{n^3}{mm}$ eſt æqualis. Ideoque ſi l æquatur ipſi $\frac{n^3}{mm}$, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & ſi inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propoſitæ poterit eſſe inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major eſt quàm l, tum quoque x majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$; & ſi minor eſt quàm l, tum ſimiliter x minorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per tranſpoſitionem eſt etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc ſi xx æquetur ipſi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque ſi fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc eſt, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propoſitæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & ſi inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per tranſpoſitionem eſt quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, ſi æquatio propoſita fuerit realis. Et ſi æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per conſequens $l + m$ major quàm x. Quòd ſi autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione conſtat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus eſt quàm n^3. Hinc cum $l + m$ major ſit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propoſitæ major eſt quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major eſt quàm x, ſi major fuerit x quàm m, erit inter hoſce terminos $l + m$ & m. Quòd ſi verò m major eſt quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ eſt ma-

jus.

jus quàm n^3, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm + mm}$.

CAPUT V.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \infty n^3 x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed est quoque $x^4 - p^4 \infty n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per transpositionem est etiam $n^3 x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utraque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propositæ est major quàm n & p, sed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quam $n + p$.

Prop. 3. $x^4 * * + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3 x$, ac per consequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3 x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & $p^3 x$ majus quàm x^4. Sed est præterea $x^4 + n^3 x \infty p^4$, ideoque $p^3 x + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p.

CAPVT VI.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 \infty . lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt{C.}\frac{p^4}{l}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major est quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed est etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p, at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty p^4 - lx^3$ ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui est etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt{C.}\ \frac{p^4}{l+p}$, sed minor quàm p & $\sqrt{C.}\ \frac{p^4}{l}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc caſu, quoniam x^3 major eſt quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus eſt quàm x^3, erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major eſt quàm x. Atqui eſt $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l} + lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & diviſâ per pp, habebitur $ppx + llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimenſionum, in quibus ſecundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: ſiquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipſarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri poſſint.

CAPVT VII.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo termino carentibus.

Prop. I. $x^{4}* - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem erit $x^4 - mmxx \infty p^4 - n^3 x$. Vnde apparet, quòd, ſi fuerit xx æquale ipſi mm, hoc eſt, $x \infty m$, etiam x ipſi $\frac{p^4}{n^3}$ ſit æqualis futura. Ideoque ſi fuerit m æqualis ipſi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & ſi inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive unam ſive tres habuerit, ſemper erit inter duos hoſce terminos. Præterea cognoſcitur, ſi duo hi termini fuerint æquales, hoc eſt, $mn^3 \infty p^4$, ſubſtituto mn^3 loco p^4 in æquatione propoſita, eâque diviſâ per $x - m$, fore, ut non poſſit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - n^3 x \infty p^4 - mmxx$. Vnde conſtat, ſi x æqualis fuerit ipſi n, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc eſt, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & ſi fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & ſi inæquales fuerint, tunc eam neceſſariò futuram inter hoſce duos. Idem demonſtrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe ſi fuerint æquales, radix æquationis propoſitæ æquabitur unicuique illorum duorum; ſin inæquales, neceſſariò conſtituetur inter duos, tranſpoſitâ ſcilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3 x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3 x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4 - n^3 x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Eodem modo eſt $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3 x$, & conſequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per tranſpoſitionem eſt quoque $mmxx + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Conſimili ratione demonſtrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & conſequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propoſitæ æquationis major eſt quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4 + n^3 x \infty p^4 - mmxx$, ac per consequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc est, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui est quoque $mmxx + n^3x \infty p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 + mmxx + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus est quàm p^4, ac per consequens, divisâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propositæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty mmxx - x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter est $x^4 + p^4 \infty mmxx - n^3x$, & consequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea est $x^4 + n^3x \infty mmxx - p^4$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed est etiam $x^4 + p^4 \infty n^3x - mmxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx + p^4 \infty n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty n^3x - p^4$. Vnde patet,

tet, ſi $x x$ æquatur ipſi $m m$, hoc eſt, $x \infty m$, eandem x fore æqualem ipſi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per conſequens, ſi fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis ipſorum; & ſi inæquales fuerint; neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty m m x x - p^4$. Vnde ſimiliter diſcimus, ſi x^3 æquatur ipſi n^3, hoc eſt, $x \infty n$, fore etiam $x x \infty \frac{p^4}{m m}$, hoc eſt, $x \infty \frac{p p}{m}$. Ideoque ſi hi termini n & $\frac{p p}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propoſitæ æquabitur ſingulis eorundem terminorum; ſin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propoſitæ inter illos duos conſtituta erit. Præterea per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty m m x x + n^3 x$, ideoque $m m x x + n^3 x$ majus quàm x^4, & $m m x + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, ſi propoſita æquatio eſt realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $m m x + n n x$ majus quàm x^3, & $m m + n n$ majus quàm $x x$, hoc eſt, x minor erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propoſitæ neceſſariò minorem eſſe quàm $\sqrt{m m + n n}$. Denique exiſtente $x^4 + p^4 \infty m m x x + n^3 x$, erit ſimiliter $m m\ x x + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa eſt $\sqrt{m m + n n}$ major quàm x, erit conſequenter $m m x \sqrt{m m + n n}$ majus quàm $m m x x$, ideoque $m m x \sqrt{m m + n n}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{mm \sqrt{m m + n n}, + n^3}$. Quare inventus eſt terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ. Atque ita modo ſequenti capite obſervato propoſitione ſeptimâ demonſtrari poteſt, quòd x major eſt quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{m m n + n^3}$.

CAPVT VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Vnde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$ ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Vnde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$; ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$, majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quam lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx \infty p^4 - lx^3$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $llpp$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x. Deinde eſt $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per conſequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea eſt $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde eſt $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea eſt $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & conſequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Vnde patet, ſi x æqualis eſt ipſi l, ipſam x quoque fore æqualem ipſi $\frac{pp}{m}$; & per conſequens, ſi fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propoſitæ æqualis ſingulis illorum; & ſi fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propoſitæ poterit eſſe inter illos duos conſtituta. Eodem modo per tranſpoſitionem eſt $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Vnde ſimiliter conſtat, ſi fuerit x æqualis ipſi m, fore quoque x æqualem ipſi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque ſi æquales fuerint m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propoſitæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & ſi fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propoſitæ erit inter illos duos conſtituta. Porrò per tranſpoſitionem eſt quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam ſi fuerit æquatio propoſita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPVT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. 1. $x^4-lx^3 * +n^3x-p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4-lx^3 \infty p^4-n^3x$. Vnde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æquationis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \propto p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4, & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \propto p^4 - lx^3$. Vnde constat, si x æqualis est ipsi n, fore quoque $x^3 \propto \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \propto \sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3$. Vnde patet, si fuerit x æqualis ipsi p, fore quoque $xx \propto \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \propto \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto n^3x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo est $x^4 - n^3x \propto lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Similiter est $x^4 - p^4 \propto lx^3 + n^3x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + n + p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, n, & p, at minorem quàm $l + n + p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$ etiam constat, quod $lx^3 + n^3x$ est minus quàm x^4 : & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x, erit l^3x minus quàm lx^3, ideoque $l^3x + n^3x$ multo minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3 + p^4}}$.

Pro-

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo est $x^4 + n^3x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 + n^3x \infty p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm $l\,x^3$. Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$: Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 \infty n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc est, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \propto n^3 x - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \propto p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3 x \propto lx^3 - p^4$. Vnde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.\,\frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \propto lx^3 + n^3 x$, ideoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l + n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \propto lx^3 + n^3 x$, erit quoque $lx^3 + n^3 x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3 x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3 x + lnnx + 2llnx + n^3 x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major est quàm x, si fuerit x

major

major quàm n, erit neceſſariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd ſi verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia lx^3+n^3x majus eſt quàm p^4, crit & $lnnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

CAPVT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimenſionum, in quibus nullus terminus deeſt.

Prop. I. $x^4-lx^3+mmxx-n^3x+p^4 \infty 0$.

PEr tranſpoſitionem eſt $lx^3+n^3x \infty x^4+mmxx+p^4$, ideoque lx^3+n^3x majus quàm x^4, & $lxx+n^3$ majus quàm x^3. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $lxx+nxx$ majus quàm x^3, hoc eſt, $l+n$ major quàm x, & x minor quàm n. Multò igitur magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x neceſſariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3+n^3x \infty x^4+mmxx+p^4$ conſtat, eſſe lx^3+n^3x majus quàm p^4. Sed inventa eſt $l+n$ major quàm x, ac per conſequens $ll+nn+2ln$ majus quàm xx, & $l^3x+lnnx+2llnx$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x+lnnx+2llnx+n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3+lnn+2lln+n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major eſt quàm $l^3+lnn+2lln+n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 diviſum per cubum ex $l+n$. Inventus eſt itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propoſitæ, ſive hæc duas ſive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ ſemper major eſt quàm x, ſi ponatur x quoque major quàm n; manifeſtum eſt eam eſſe inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd ſi autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam eſt lx^3+n^3x majus quàm p^4; erit $lnnx+n^3x$

 majus

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \infty lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Iam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l + m + n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x$
$+ n^3x$

$+ n^3 x$ æquale aut majus quàm $lx^3 + mmxx + n^3 x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$. Vnde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{lmm + m^3 + n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{lnn + mmn + n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx \infty x^4 + n^3 x + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx$ majus quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx + mx$ majus quàm xx, & $l + m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l + m$. Vnde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & $lx^3 + mmxx$ majus est quàm p^4; erit $lmxx + mmxx$ majus quàm p^4; ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{lm + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm + mm}}$, at minor quàm $l + m$.

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Demonſtrabitur ex tranſpoſitionibus requiſitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per conſequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem ſingulis radicum æquationis propoſitæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Iam ſi fuerit propoſita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm+nn}$ major quàm x; & multò magis, ſi fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm+nn}$ ſemper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm+nn}$ & n, ſi major eſt quàm n. Quòd ſi fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam eſt $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propoſitæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm+nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Factis tranſpoſitionibus requiſitis, demonſtrabitur eſſe x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque ſi fuerit $x^4 \infty lx^3$, erit $x \infty l$, & $ln^3 \infty n^3x$, & $n^3x + p^4 \infty mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \infty mmxx$, & $x \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Vnde patet, ſi fuerit $l \infty \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc eſt, ſi habeatur $llmm \infty ln^3 + p^4$; radicem æquationis propoſitæ fore æqualem ſingulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, ſubſtituto in hoc caſu in æquatione propoſita valore ipſius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipſam eſſe diviſibilem per $x - l$. Quòd ſi fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc eſt, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & ſi fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc eſt, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Iam quandoquidem æquatio propoſita eſt realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd ſi fuerit æqualis vel major quàm p, ſitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus eſt quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd ſi autem x minori exiſtente quàm l, ipſa ſit æqualis vel major quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus eſt quàm $mmxx$, erit ſimiliter $n^3x + p^3x$ minùs quàm $mmxx$, & conſequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc caſu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare univerſaliter apparet, æquationem propoſitam non habere præter unam radicem realem ipſi l æqualem, cùm eſt $llmm \infty ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, ſive unam, ſive tres habuerit, fuerit ſemper neceſſariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty - n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty - n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4, substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Iam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Poſtremò, cùm x minor quàm l, etiam ipſa minor ſit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per conſequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc caſu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita ſint, conſtat univerſaliter, æquationem propoſitam non habere niſi unam veram radicem, quæ æqualis eſt ipſi l, quando eſt $llmm \infty p^4-ln^3$, modo unaquæque radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, fuerit ſemper neceſſario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4-lx^3-mmxx-n^3x-p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per tranſpoſitionem $lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \infty x^4$, & per conſequens $lx^3+mx^3+nx^3+px^3$ majus quàm x^4, & $l+m+n+p$ major quàm x. Porrò, quoniam eſt $x^4 \infty lx^3+mmxx+n^3x+p^4$, erit x^4 majus quàm lx^3+mmxx, & xx majus quàm $lx+mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major ſit quàm $lxx+mmx+n^3$, erit multo magis major quàm $l^3+m^3+n^3$, $l^3+lmm+n^3$, & $2lmm+n^3$, & ſic de reliquis terminis, quos ſubſtituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus eſt quàm $l^4+m^4+n^4$, quàm $m^4+n^4+p^4$, & ſic de reliquis. Præterea, quoniam x major eſt quàm n & p, & $lx^3+mmxx+n^3x+p^4 \infty x^4$, erit $lx^3+mmxx+nnxx+ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx+mm+nn+pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi appelletur zz, habebitur $lx+mm+nn+pp \infty xx+zz$. Quantitas autem hæc incognita zz neceſſariò minor erit quàm $mm+nn+pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex prima & majori ex secunda, esset reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. 11. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Vnde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc est, omnibus per xx divisis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc est, si fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Iam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur zz: habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$,

erit

erit $xx \infty lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur zz, habebitur $xx \infty lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \infty p$, erit quoque $n^3x \infty lx^3 + mmxx$, & $x \infty \frac{n^3}{lp + mm}$. Vnde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc est, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Iam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major sit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p, ipsa sit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx + mmxx$, erit n^3x

 minor

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc $n^3 x$ minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit $n^3 x$ minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Vnde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + mmp + n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \infty n^3 x$, hoc eſt, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn + p^4}{l} \infty x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Iam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus est quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n, & ipsa etiam minor sit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor est quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc casu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Vnde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideoque si fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc est, si est $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$ erit $p^4 \infty n^3x$, seu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Vnde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus sit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt sit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, seu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc est, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd si fuerit x^4+lx^3 minus

nus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx+lx$ minus quàm mm, erit quoque p^4 minus quàm n^3x, hoc eſt, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx+lx$ minus ſit quàm mm, erit $xx+lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx+lx+zz \propto mm$, vel $xx \propto -lx+mm-zz$, hoc eſt, $x \propto -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm-zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quare in hoc caſu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Atque ita in genere perſpicuum eſt, cùm $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipſi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propoſitæ æqualem eſſe ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$; ſin minus, quamlibet radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, neceſſariò eſſe inter hoſce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$.

F I N I S.

JOHANNIS DE WITT

ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheſeos
Profeſſoris.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Clarissimo, Doctissimoque Viro,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

S. P. D.

L*Inearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac pro-*

inde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quam maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò Coni Sectiones *appellarunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni, at verò earundem singulas infinitis quoque modis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci, ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quod linea-*

linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quam quòd tam in tractatione ortus & generationis, quàm in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc amicissime Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio, quæque de eodem argumento à me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera autem, quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus, Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

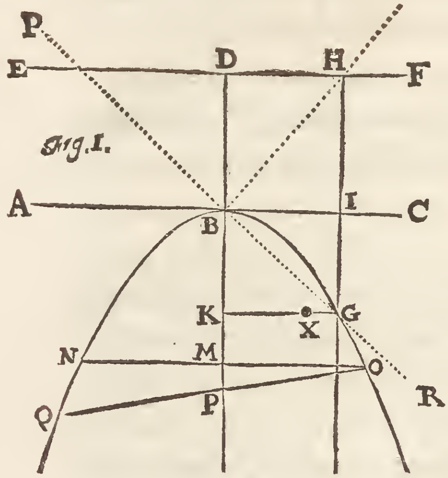


Fig. I.

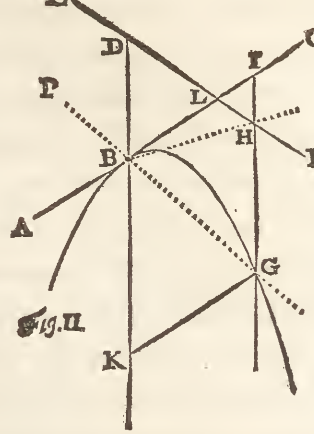


Fig. II.

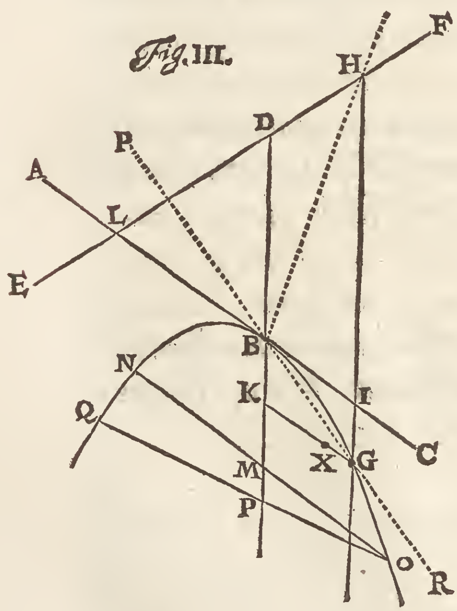


Fig. III.

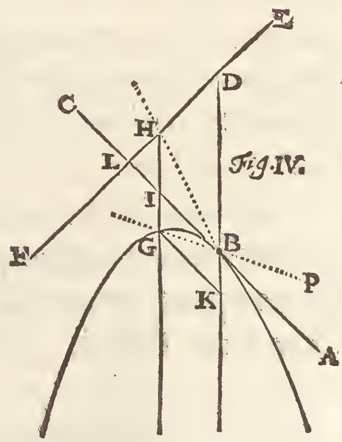


Fig. IV.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, utl prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

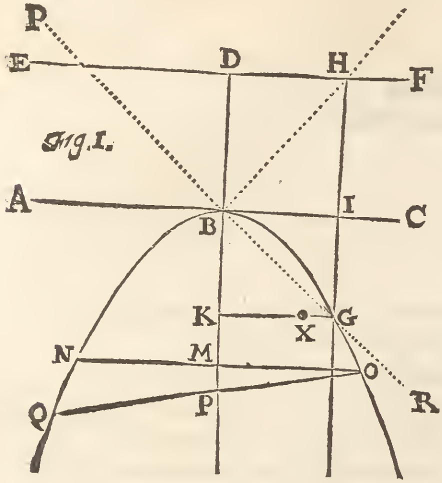
Cum *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus,

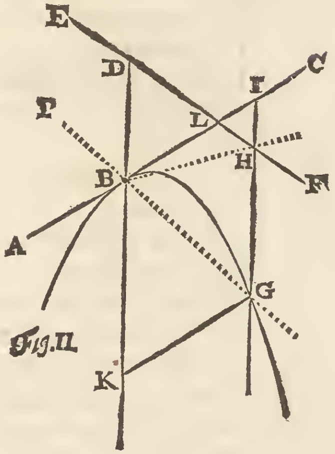
X.

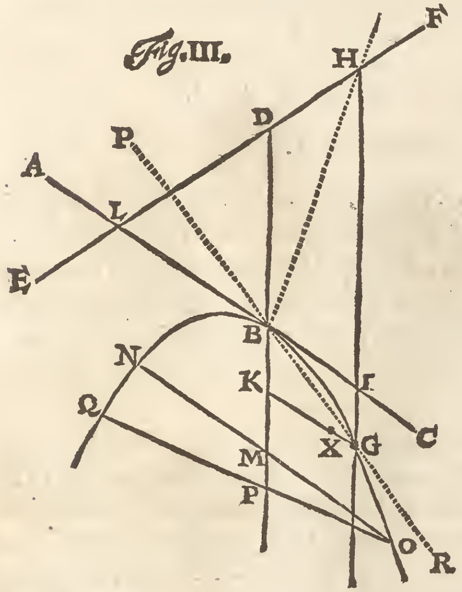
Quamlibet curvam, intersectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur *in statione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

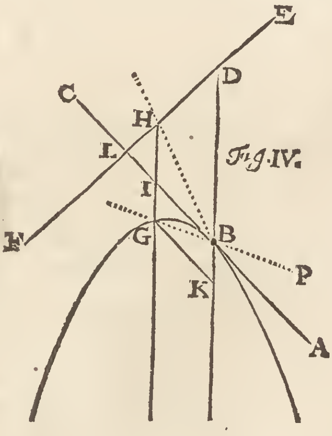
Ut

Vt in appositis figuris, si recta H G sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam E F, eodemque illo motu secum ducere crus B H anguli H B G, circu-









lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt
HG *describens.*
EF *directrix.*
HBG, HBP *anguli mobiles.*
FHG, EHG *anguli ad directricem.*
B *Polus.*
BD *intervallum.*
BH *crus patiens.*
BG *crus efficiens.*
PG *linea efficiens.*
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.
Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

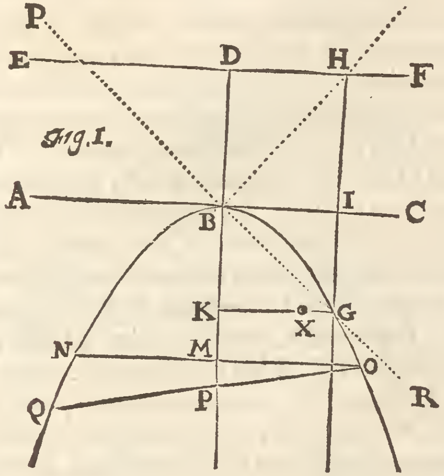
Propositio 1.

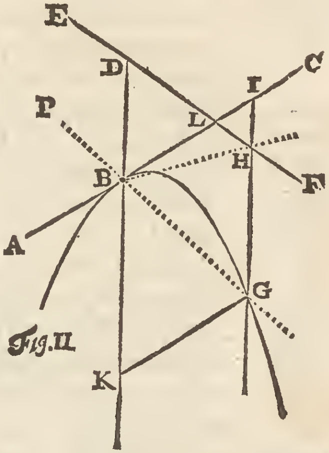
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

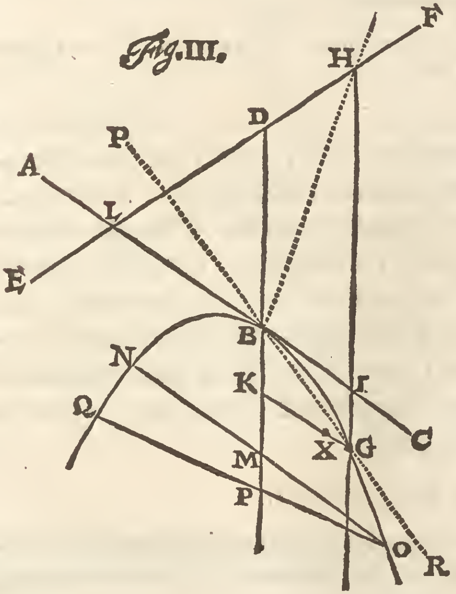
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

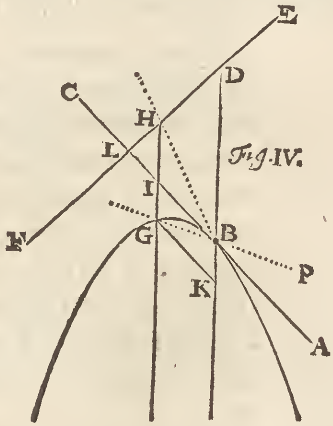
Con-

Conſtitutis enim tam *angulo mobili* quàm *deſcribente* in ſtatione uti fuêre, cùm per ipſarum interſectionem deſcriptum eſt punctum G, veluti in HBG & HIG: ſi tam *angulus mobilis* quàm is









qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit [1] ut H I ad I B, ita I B ad I G, id est [2], ut D B ad G K, ita G K ad B K. ac proinde [3] quadratum rectæ G K rectangulo D B K æquale erit.

At verò si obliquus fuerit uterque angulorum A B D, E D B, uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acuti erunt. sit itaque ipsarum intersectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli L B D, L D B, ex constructione, quàm L I H, L H I, propter parallelas D B, H I, æquales sunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ L D, L B, quàm L H, L I; ac proinde & compositæ [a] vel residuæ [b] D H, B I æquales. Cum autem, angulis D B I, H B G iisdem, sive æqualibus existentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo H B I, angulus D B H angulo I B G, id est [6], B G K, fiat æqualis, atque angulus B D H ex constructione angulo D B I, id est [7], B K G, sit æqualis: erunt [8] triangula B D H, G K B æquiangula, eritque proinde [9], ut B D ad D H sive B I, hoc est [10], ad G K, ita eadem G K ad K B. quare, ut supra [11], quadratum applicatæ G K rectangulo D B K æquale erit. Quod est propositum.

[1] per Cor. 8 sexti Eucl.
[2] per 34 primi.
[3] per 17 sexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 6 primi.
[a] in casu fig. II & similibus.
[b] in casib. fig. III & IV, aut similibus.
[c] in casu fig. II. & sim.
[d] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 sexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 sexti.

Constat itaque, curvam intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *describentis efficientisque* intersectio quibuscunque stationibus in uno tantùm puncto fiat, manifestum est, *describentem* in qua-

cunque

cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Fig. I.

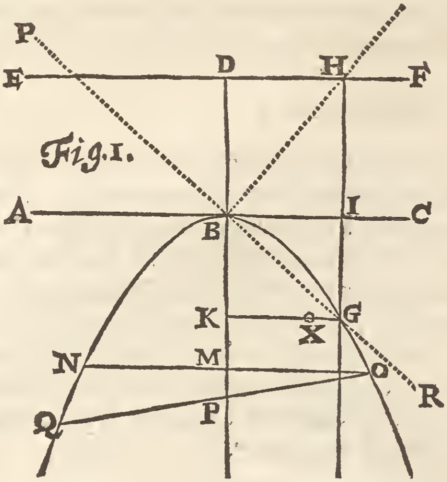
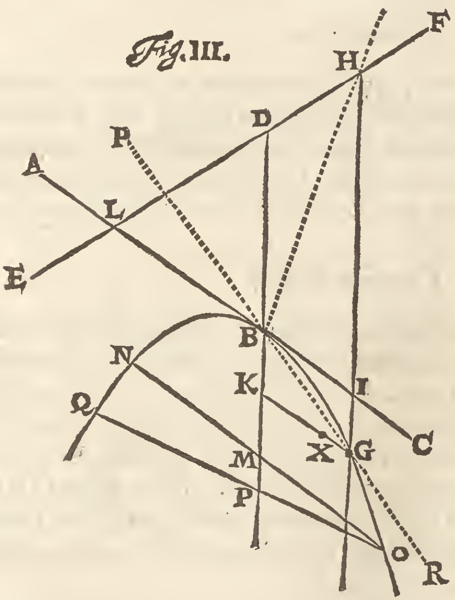


Fig. III.



Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti G B I, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., B G, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

Corollarium 3.

Constat præterea angulum G B K indefinitè quidem diminui, omnique proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* B G nunquam cum *describente* B K coincidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

[1] per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens. [3] per Corol. 2 hujus. [4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Vt, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

[6] per Corol. præcedens. [7] per 2 sexti. [8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ ſunt:. & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit.

Fig. I.

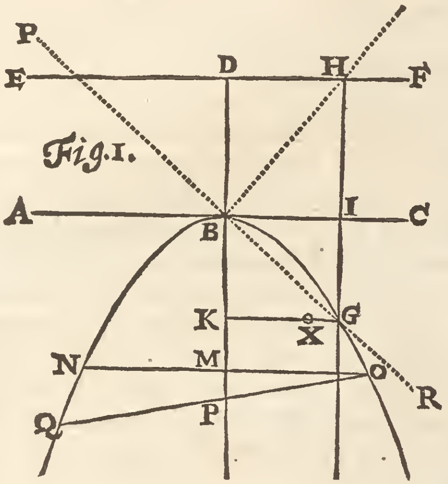
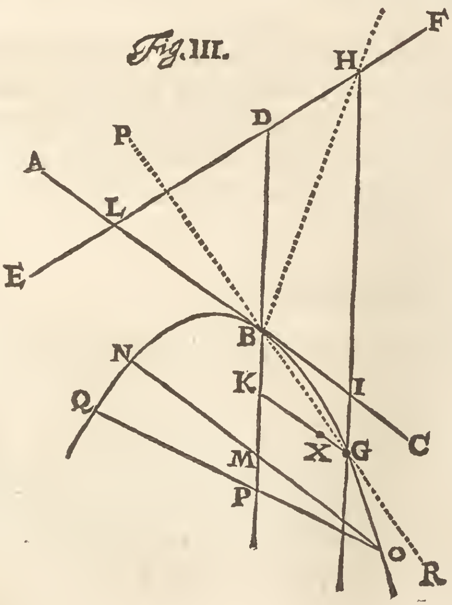


Fig. III.



Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, ſi applicatæ ſint G K, N M, erit [1] quadratum rectæ G K ad quadratum ipſius N M, ut rectangulum D B K ad rectangulum D B M, id eſt [2], ut B K ad B M.

[1] *per 1 hujus.*

[2] *per 1 ſexti.*

Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

[3] *per Corol. 1 hujus.*

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti termi-

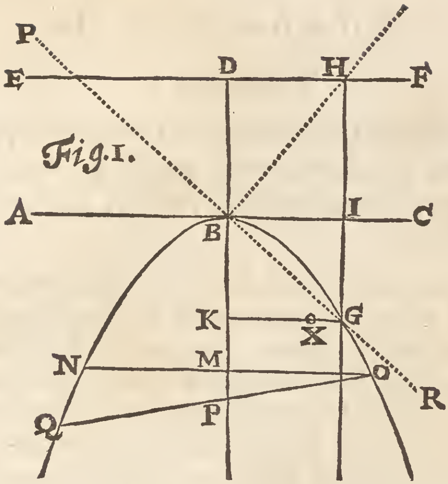


Fig. I.

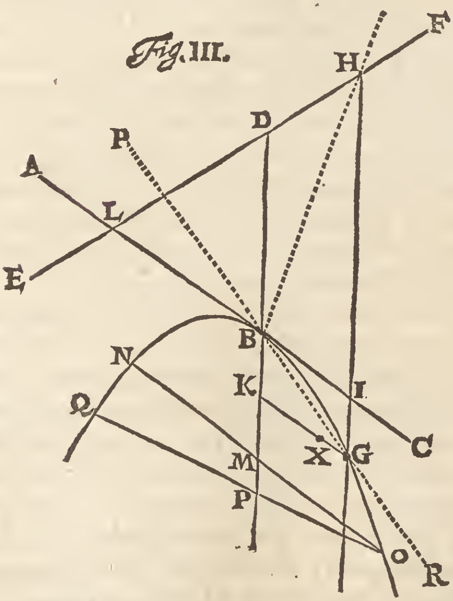


Fig. III.

terminum rectâ E D F in angulo E D B ipsi A B D æquali, *efficiente* A C, & *intervallo* B D, ad *directricem* E F curvam describere, ut N B G: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diameterve A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; ſitque per punctum M, in curva utcunque aſſumptum, ducta recta M O, axi ſive diametro A B parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum eſſe; imò ſi ductâ, per M rectâ S V, ita ut ab axe ſive diametro A B extra Parabolam abſcindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut ſit M K ipſis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V, *intervallo* verò M K Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm M O diametrum, atque M verticem fore, ſed & M K latus rectum eſſe ad dictam diametrum M O pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omnesque ipſi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque ad hanc ipſam M O ordinatim applicari.

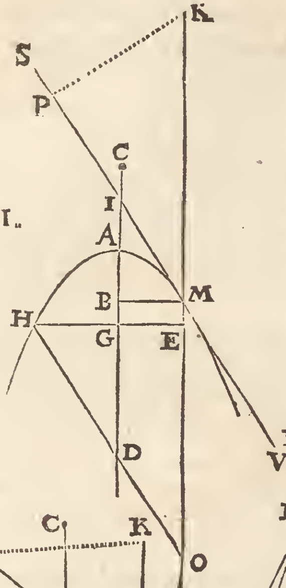
Sit enim in expoſita Parabola H A M aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta H G ad axem ſive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipſi S V æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum A B ſecet in D. Et apparet [1], ſi quadratum rectæ H O æquale ſit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, duplicatis

[1] *ex* 1 *hujus.*

[2] *per* 1 *hujus, &* 17 *ſexti.*

Fig. I.



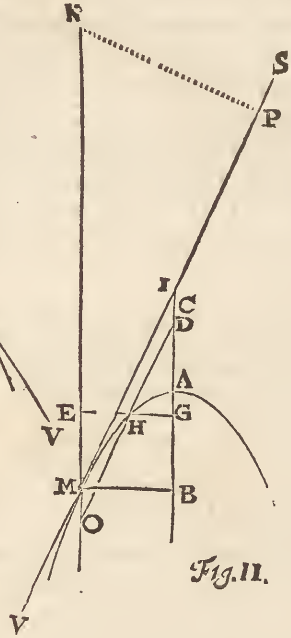


Fig. II.

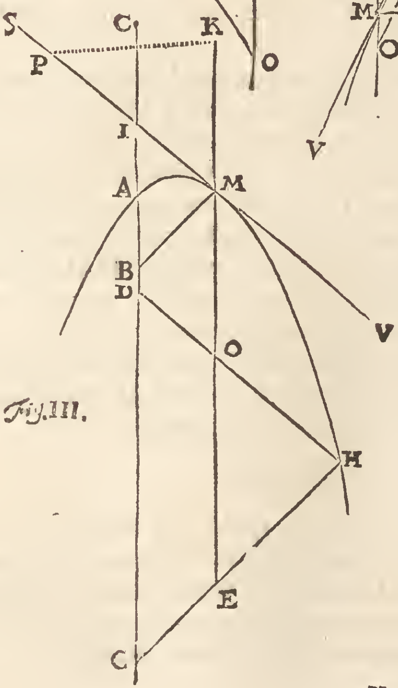


Fig. III.

catis conſequentibus, ut C A ad duplam M B ſeu ad G E bis, ita M B ad B I, hoc eſt [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum ſub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento ſub extremis, nimirum rectangulo ſub C A & G D. Vnde cum bina quadrata rectarum H G & B M ſeu G E æqualia ſint [5] binis rectangulis C A G & C A B ſeu C A I, id eſt [6], rectangulo ſub C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptiſve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo ſub C A & G D ab altera parte [7], compoſita [a] vel reſidua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum ſub C A & I D ſeu M O æqualia [c].

3 *per 29 primi, & 4 ſexti.* 4 *per 16 ſexti.* 5 *per 1 hujus.* 6 *per 1 ſecundi.* *a* in caſu fig. I & ſimilibus. *b* in caſu fig. II & III ac ſimilibus. 7 *quippe per ſupra demonſtrata rectangulum* H G E *bis æquale eſt rectangulo ſub* C A *&* G D. *c* in caſu enim fig. I, ſi ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compoſitum fit E H quadratum, per 4 ſecundi; ac ſi ab altera parte ad rectangulum ſub C A & I G addatur rectangulum ſub C A & G D, fit, per I ſecundi, rectangulum ſub C A & I D ſeu M O. Eodem modo, ſi in caſibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, reſiduum erit, per 7 ſecundi, E H quadratum; ac ſi ab altera parte à rectangulo ſub C A & I G auferatur rectangulum ſub C A & G D reſiduum erit, per 1 ſecundi, rectangulum ſub C A & I D ſeu M O.

Ideoque cum ſit ut B M quadratum ad M I quadratum, ſive ut C A B rectangulum [8] ad rectangulum ſub K M & A B [9], hoc eſt [10], ut C A ad K M, ſeu, aſſumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum ſub C A & M O ad K M O rectangulum, ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; ſitque rectangulum ſub C A & M O, ut jam oſtenſum eſt, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

Vnde cum punctum H, ubicunque id in expoſita Parabola A H aſſumptum fuerit, ſemper quoque ſit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribitur: ſequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem eſſe; ita ut conſtet veritas eorum, quæ proponebantur.

8 *per 1 hujus, & ex hypotheſi.* 9 *per 17 ſexti, & ex hypotheſi.* 10 *per 1 ſexti.* 11 *per 4 & 22 ſexti.* 12 *per 14 quinti.*

Corollarium I.

Ex antedictis manifeſtum eſt, quòd, ductis in Parabola binis quibuſlibet rectis ſibi invicem æquidiſtantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter exiſtat. Quippe quæ per medium æquidiſtantium unius diameter ducetur, ſive hæc ſit ipſa diameter ex generatione, ſive eidem parallela, per medium quo-

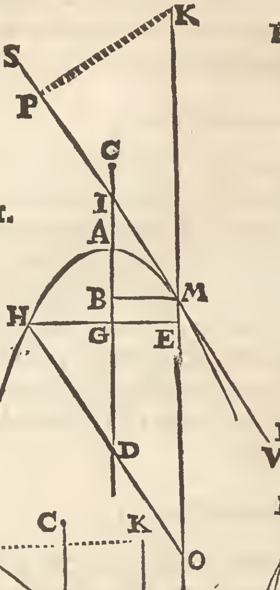


Fig. I.

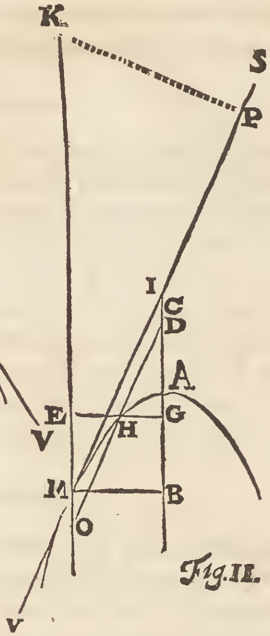


Fig. II.

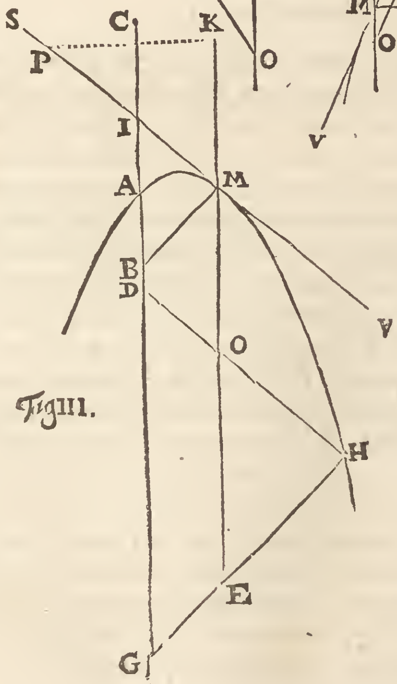


Fig. III.

[1] per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuslibet Parabolæ diametrum simulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

Corollarium 2.

[2] in 2 hujus.
[3] per 9 Cor. 1 hujus.

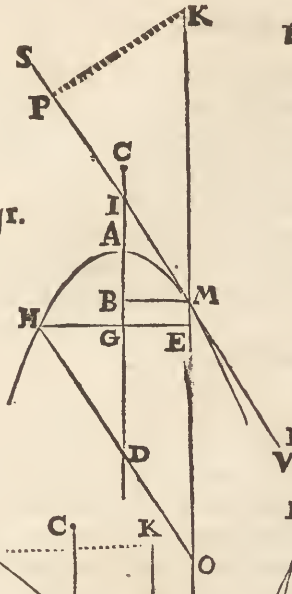
Patetque porrò, quaslibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales sint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque assumpto contingere, nunc [2] demonstratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere posse, superiùs [3] ostensum est.

Corollarium 3.

[4] per 1 Corol. 2 hujus.
[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.
[6] per 2 hujus, ejusque Cor. 2.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri termino sit datum punctum, notum nunc est [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Parabolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum, veluti M, sitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipsi A D applicatâ, sumptâque A I ipsi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipsi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rursus rectam per I & M. At verò si neque in curva neque in diametro producta detur, ut, si inventa diameter sit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam secet in A, sumptâque A B ipsi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidistans sit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe constat ex antedictis [6], ipsam I M omni casu Parabolam contingere in puncto M.

Fig I.



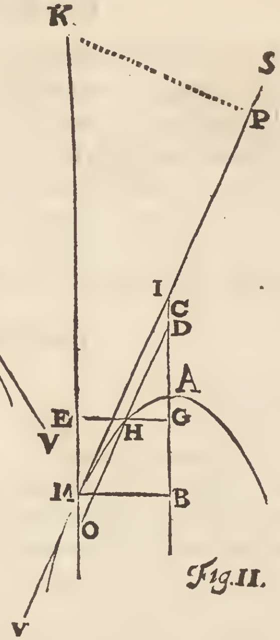


Fig.II.

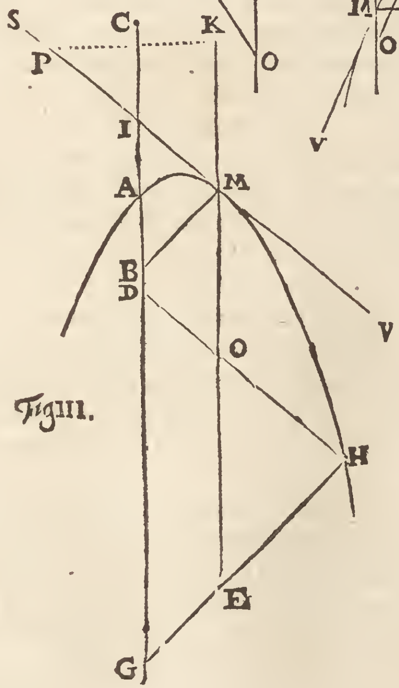


Fig III.

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam M K, ex eo quòd ipsis A I, I M tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri M O parametrum esse.

1 in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro M O, vertice M, & latere recto M K, anguloque S M K vel V M K, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum M O, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo A B M: ducatur à termino K ad S V recta K P in angulo K P V ipsi dato A B M æquali, divisâque P M bifariam in I ducatur per I recta I B ipsi M O æquidistans. Deinde ab M ad eandem I B applicetur recta M B in angulo M B I dato angulo æquali, divisâque B I bifariam in A, erit quæsita diameter A B, vertex punctum A, ejusque parameter A C, recta nempe, quæ ipsis A B, B M tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi B M parallelâ ac *intervallo* A C describitur, quandoquidem quadratum applicatæ B M ex constructione [3] rectangulo C A B est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula B I M & P M K, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas A D, M O) erit [5] ut B I ad I M, ita P M ad M K. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut A I ad I M, ita I M ad M K. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris A B, M O, ac parametris A C, M K,

2 per 1 hujus.
3 per 17 sexti.
4 per 29 primi.
5 per 4 sexti.
6 in 2 hujus.

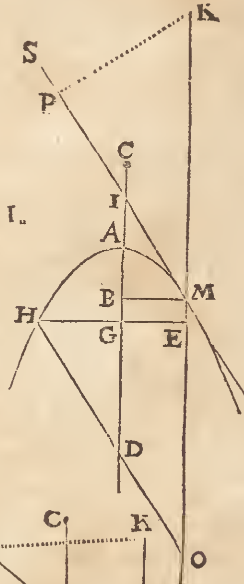


Fig. I.

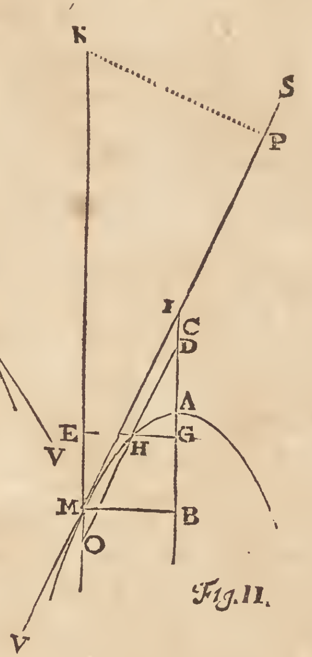


Fig. II.

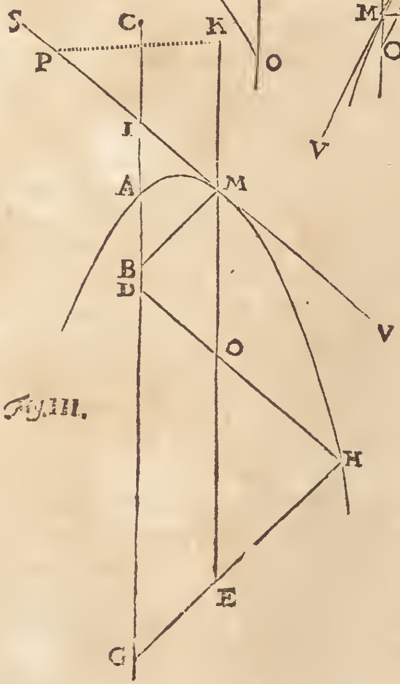


Fig. III.

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & interfectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPVT II.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quòd à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *deſcribentem* interjacet, quàm eam *deſcribentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in appoſita figura, ſi recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque ſuo promovere & ſecum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B ſemper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis ſemper tranſeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, ſimulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C interſectione C deſcribatur curva linea *c* C, ſitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipſam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipſa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipſa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evaneſcere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, ſtatione illâ, cruri E C parallela ſit; ita ut tunc dictum crus E C ſive recta C E M eadem ſit cum linea G F H, nimirum ſuppoſitâ D F ipſi B E, æquali, eruntque

a quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor diſtinctis ſtationibus exhibentur.

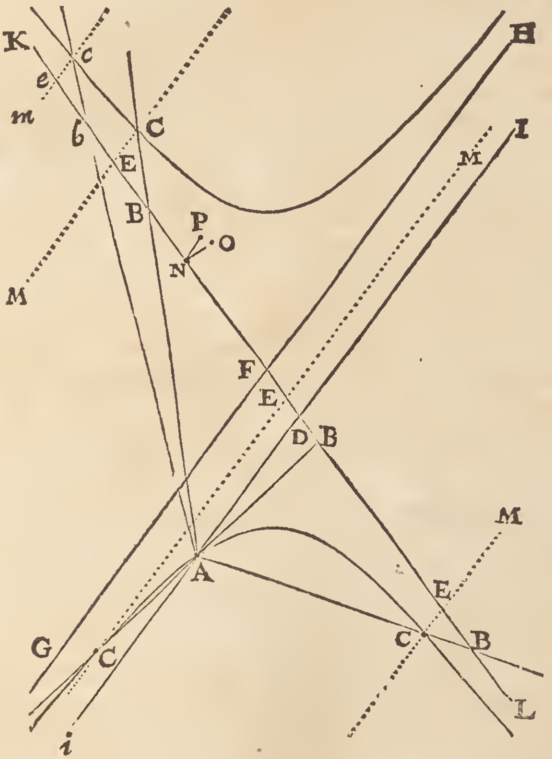
A B C *deſcribens* in ſtationibus diverſis.
K L *directrix*.
B E C, B E M, ſive D F H & D F G *anguli mobiles*.
A *Polus*.
E B *crus patiens*.
E C *crus efficiens*.
M C *linea efficiens*.
G F H *efficiens in ſtatione prima*, ſeu *efficiens* ſimpliciter.
A D I *deſcribens in ſtatione prima*, ſeu *deſcribens* ſimpliciter.
E B ſeu F D & A D utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

Propoſitio 3.

Quibuſlibet *angulis mobilibus* ac quibuſcunque *intervallis*, juxta definitiones præmiſſas deſcriptâ curvâ, hoc ipſi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* E B, ſeu F D & A D, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

 Con-

Conſtitutis enim tam *angulo mobili* quàm *deſcribente* in ſtatione uti fuêre, cùm per ipſarum interſectionem deſcriptum eſt punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales ſunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula ſint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id eſt, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis A D, E B ſeu A D F. Quod erat propoſitum.

1 per 29 primi. *2 per 4 ſexti.* *3 per 16 ſexti.*

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter ſe quoque ſint æqualia, manifeſtum eſt, curvam, interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, ſi binas curvas eodem & continuato motu genitas ſimul conſideres, eſſe eas, quas Oppoſitas Sectiones dixêre: *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipſas, quas Aſymptotos nuncupaverunt, atque ipſarum occurſum ſive interſectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ ſive Oppoſitarum Sectionum Centrum ab ipſis appellatum fuit. ideoque & hæc ſingula iiſdem illis nominibus in poſterum indigitabimus, ſolummodo ſectionum nomen, ob rationes ſuperiùs [4] expoſitas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem ſub *intervallis* contentum, ſeu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

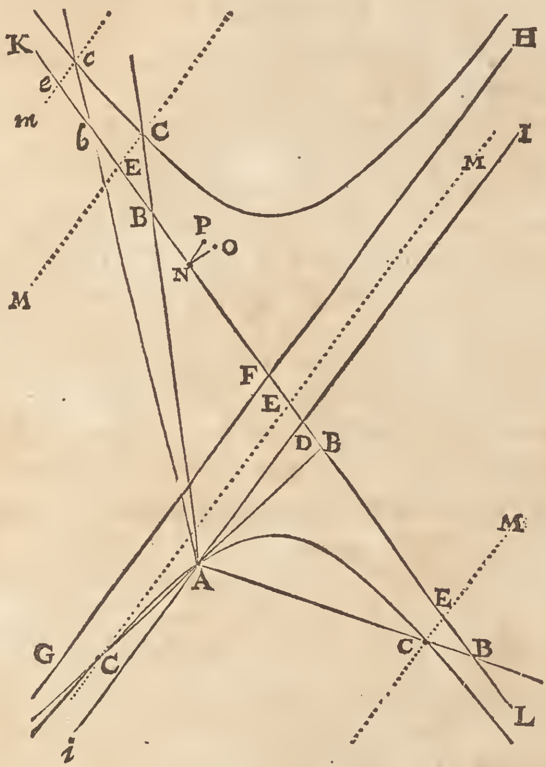
4 in Epiſtola ad Schotenium.

Corollarium I.

Ex ipſa deſcriptione manifeſtum eſt, Aſymptotos & Hyperbolam magis magisque ad ſe invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad diſtantiam, datâ quâlibet diſtantiâ minorem; cujus tamen, ſi demonſtrationem exactiorem deſideres, data diſtantia ſit recta N O, ad Aſymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor ſit, ſi fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipſi N P æqualis atque Aſymptoto F H æquidiſtans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

5 per 16 ſexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ[6] demonſtrata ſunt, punctum C in *6 in 3 hu-*
Hyperbola. Eſt autem & *c e* ipſi P N æqualis, hoc eſt, datâ di- *jus.*



ſtantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto *c* ad Aſymptoton F K ducta, id eſt, diſtantia Hyperbolæ à prædicta Aſymptoto, ibidem datâ diſtantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita ſimul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem eſt ei, qui Hyperbolam continet, per centrum tranſeunt, vel Aſymptotorum alterutram ſecant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, & in in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

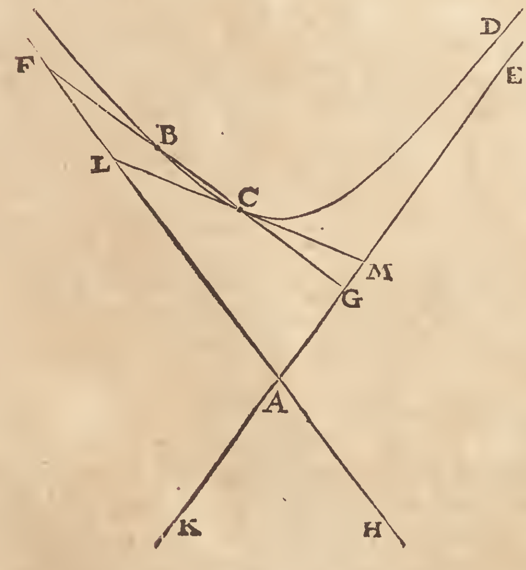
Constat prætérea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF, ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-

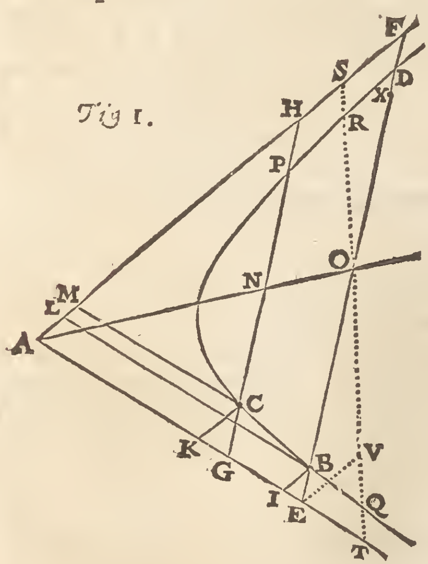


Aſymptotorum alterutri parallela eſſet, aut, ſi vel huic vel illi Aſymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta
hanc vel illam Aſymptoton ſecaret; ideoque [1] curvæ in uno tan- [1] per 2
tùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem & 3 Cor.
ſecaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra 3 hujus.
id quod ponitur. Ac proinde conſtat propoſitum.

THEOREMA V.

Propoſitio 5.

Aſſumptis, vel in una eademque, vel in oppoſitis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductiſque per eadem ſive unâ rectâ ſive duabus, ſibi mutuò parallelis: erunt rectangula ſub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Aſymptoto utrinque interceptis, ſibi invicem æqualia.



Sint, vel in eadem, vel in oppoſitis Hyperbolis B P C D, cujus Aſymptoti A E, A F, aſſumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ
B D, C P ſibi invicem [a] qui u-
parallelæ Aſymptotiſ- tique oc-
que occurrentes in pun- curſus in
ctis E, F, G, H [a]: dico caſu pri-
rectangulum E B F re- mæ figu-
ctangulo G C H æquale ræ ſit in-
eſſe. tra angu-
lum E A
F, per 4
Ductis enim per ea- hujus.
dem puncta B & C re- [1] per 16
ctis, utrique Aſymptoto ſexti.
parallelis alteraque A- [2] per 3
hujus.
ſymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectan- [3] per 29
gula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc eſt [3], ut E B primi, &
4 ſexti.

 ad

4 per 16 sexti. ad G C, ita C M ad B L, id est, ita C H ad B F. ac proinde [4] rectangula E B F & G C H æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur B D, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F [a], rectangula E B F, F D E sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut C P in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur B D, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque G C, G P esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

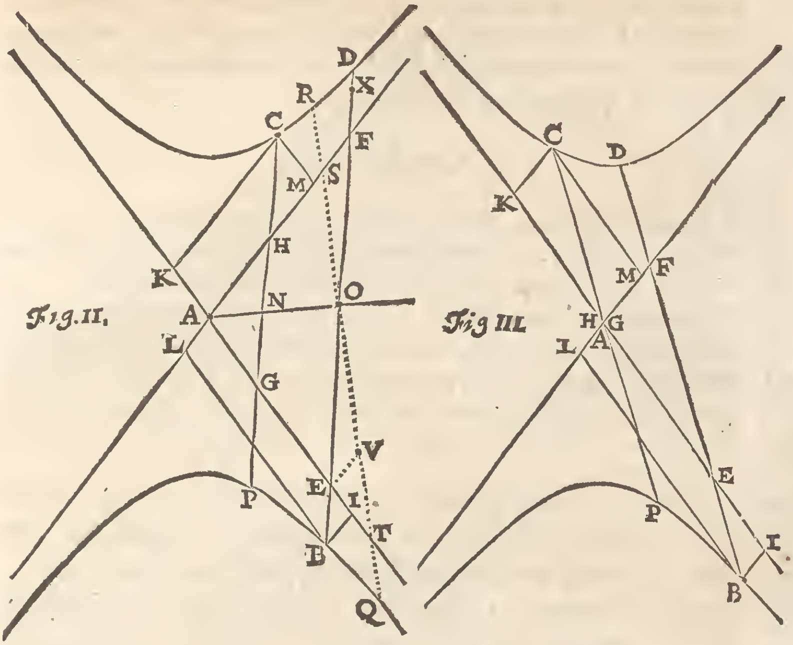
Ductâ enim utcunque B D, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] B F sit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], B D ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E [8], ac proinde & B F, D E sibi invicem æquales erunt.

5 per 5 hujus, & 16 sexti.
6 per 17 quinti.
7 per 18 quinti.
8 per 9 quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio

sui



sui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius D B punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, esset [1] X F ipsi B E ac proinde & ipsi D F æqualis, pars toti, quod est absurdum. [1] *per Coroll. præced.*

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia sint rectangula E B F & G C H, demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit. ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E, A F, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta [2] *per 3 hujus.*

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si B E, D F æquales sunt, additâ utrinque B D, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ E F, & B F, ipsi D E, ideoque & rectangulum E B F rectangulo F D E æquale erit.

Corollarium. 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta A N O dividat bifariam rectam C P; cui æquidistans sit B D; cum, æqualibus N P, N C additis demptisvè æqualibus [1] P H, C G, æquales quoque sint N H, N G, ideoque & O E, O F [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvè æqualibus [3] B E, D F, ipsæ O B & O D quoque æquales.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à cento inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 sexti.*
[3] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[a] ut A O similesque in I figura.
[b] ut A O similesque in II figura.
[c] ut P C, D B in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro A O bifariam præter applicatas alia recta, ut Q R, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata B O D, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam E O, F O [4], quàm T O, S O [5]. Quoniam verò, ductâ E V ipsi S F parallelâ [6], æqui-

[4] *per 2, & 5 Cor. 5 hujus.*
[5] *ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus.*
[6] *per 15 & 29 Primi.*

Fig. I.

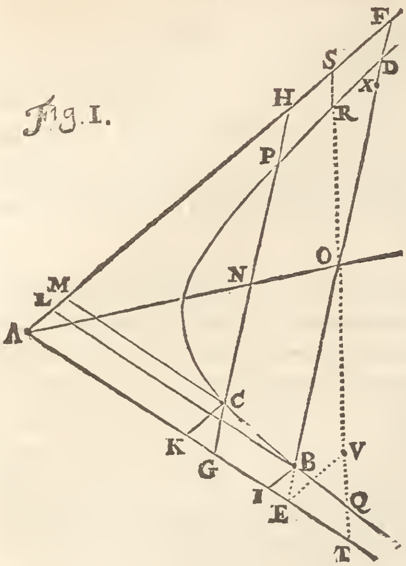
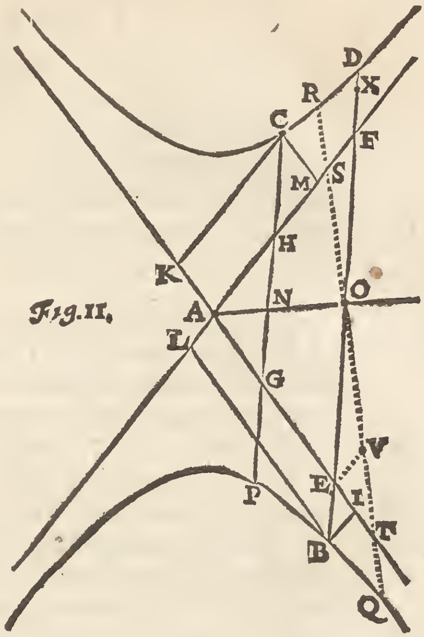


Fig. II.



æquiangula sunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad O V, ita F O ad O S. Quare cum E O ipsi F O sit æqualis, erit & [2] O V ipsi O S, hoc est, rectæ O T æqualis, pars toti, quod est absurdum. Non ergo bifariam secatur recta R Q à diametro A O.

[1] *per 4 sexti.*
[2] *per 14 quinti.*

Corollarium 7.

Atque hinc manifestum fit, quòd, si vel in una eademque vel ad oppositas Hyperbolas binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum transeat seu diameter sit: Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidistantium transibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum diametros quotlibet, simulque ordinatim applicatas ad easdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis intersectio est, reperire liceat.

[3] *per 5 Corol. 5 hujus.*

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipsi C H æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo G H Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in C H majori parte ipsa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa G H Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipsi C H inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 5 hujus.*
[3] *per 3 Cor. 5 hujus.*

Corollarium 1.

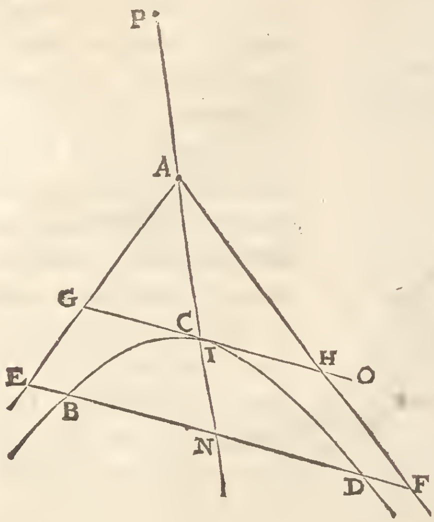
Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti G C H æquidistans utcunque ducta sit B D, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F sive [4] B F D, ut & F D E sive D E B æquale rectangulo G C H [5], id est, ipsius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

[4] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[5] *per 5 hujus.*

Co-

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidiſtans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam ſecatur, id eſt, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, ſi ad diametrum A N ordinatim applicata ſit B N D, quæ producta Aſymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta ſit recta G C H, ipſi B N D æquidiſtans, cum æquales ſint N F & N E [1]: erunt [2] quoque C H & C G æquales, ideoque [3] G C H Hyperbolam continget in C.



[1] *per 2 & 5 Corol. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 ſexti.*
[3] *per 6 hujus.*

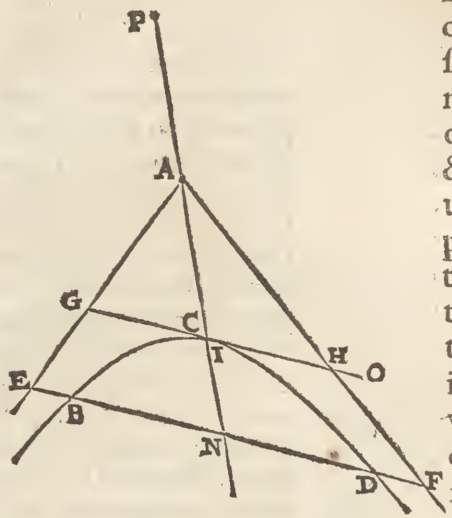
Corollarium 3.

Hinc liquet, non ſolùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam ſecari, ideoque ad eam ordinatim applicatas eſſe, ſed & non poſſe plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, ſi contingenti G H parallela ſit B D, Aſymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A C N, quæ ductæ B D occurrat in N: quoniam [4] G C, C H æquales ſunt, nec non E N, N F [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) B N, N D æquales, ideoque & ad dictam diametrum A CN ordinatim applicatæ. At verò non poſſe aliam rectam præter G H Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipſi æquidiſtantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ eſſent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non poſſe ſuperiùs [8] oſtenſum eſt.

[4] *per 6 hujus.*
[5] *per 9 quinti & 4 ſexti.*
[6] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[7] *per ſupra demonſtrata.*
[8] *in Cor. 6 5 hujus.*

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut C A P, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam; diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut G C H, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis P C, G H, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut C O, rectum latus sive Parametrum dici.



[1] per Corol. 1 5 hujus.

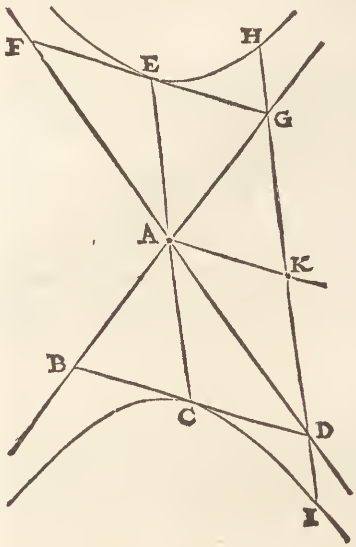
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppoſitarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Aſymptoti B G, D F, diameter tranſverſa utcunque aſſumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipſi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Aſymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppoſitam Hyperbolam contingere in E; & ſi per centrum A ducatur ſecunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipſi C E diametro æquidiſtare.



Quoniam enim eſt [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm A E ad E F, ut A C ad C D; & ſunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipſi C B, quàm E F ipſi C D, ac proinde & E G ipſi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppoſitam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propoſitum fuit. Porrò ſi per G & D ducatur recta G D, ſecans ſecundam diametrum A K in K, oppoſitiſque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ ſint E G, C D, erunt & [6] quæ ipſas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum ſecunda diameter A K contingentibus B D, F G, id eſt [7] ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidiſtans ſit, utpote ex Hypotheſi ipſi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus ſi addantur æquales [10] G H, D I: erunt ſimiliter rectæ K H, K I ſibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad ſecundam diametrum A K applicata ſit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidiſtabunt. Quod ſecundo loco propoſitum erat.

[1] *per 29 primi, & 4 ſexti.*
[2] *per 1 Corol. 5 hujus.*
[3] *per 6 hujus.*
[4] *per 14 quinti.*
[5] *per 6 hujus.*
[6] *per 33 primi.*
[7] *per 3 Cor. 6 hujus.*
[8] *per 34 primi.*
[9] *per 1 Cor. 5 hujus.*
[10] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[11] *per 6 Cor. 5 hujus.*
[12] *per 5 & 6 Cor. 5 hujus.*

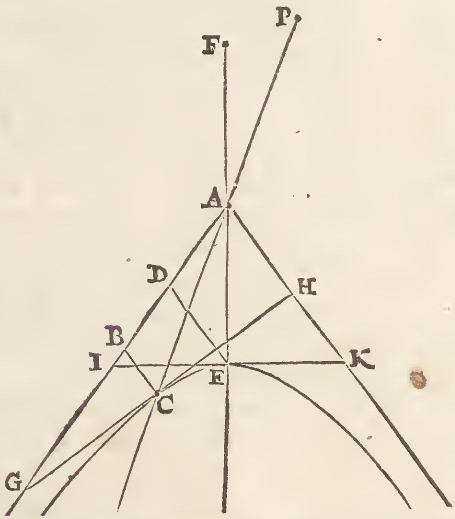
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis A G, A H, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidistante, sumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipsi A D æquali, atque Asymptoto A H parallelâ, erit E A F, transiens per E & A ac ipsius E A dupla, transversus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola est, rectangulumque A D E ipsi A B C æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque sit D A E angulus ipsi D E A, id est [5], E A K angulo, sintque & anguli A E I, A E K ex constructione æquales: erunt [6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune [7] etiam æqualia, latusque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa I K [9] curvam in E: ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypothesi.*
[2] *per 17 sexti.*
[3] *per 3 hujus.*
[4] *per 5 primi.*
[5] *per 29 primi.*
[6] *per 32 primi.*
[7] *per 26 primi.*
[8] *per sup. demonstr.*
[9] *per 6 hujus.*

THEO-

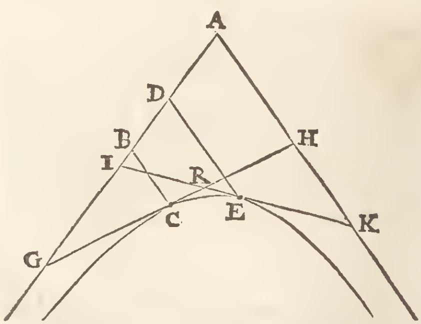
Theorema VIII.

Propoſitio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Aſymptotis comprehenſo æqualia abſcindunt triangula, & rectangula ſub eorundem triangulorum lateribus comprehenſa invicem quoque æqualia ſunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipſæque baſes ſeu contingentes Aſymptotis terminatæ, in mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam contingentes inter occurſum & Aſymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam C E, cujus Aſymptoti A G, A K, rectæ G H, I K utrinque Aſymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula G A H, I A K æqualia eſſe; ac præterea eſſe G I ad I A, ſicut K H ad H A; itemque G R ad R H, ſicut K R ad R I; nec non G C ad C R, ſicut K E ad E R.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis C B, E D Aſymptotorum alterutri, ut A H, parallelis, cum ſit ut G C ad G H, ita G B ad G A, & B C ad A H [1]; ſitque G H ipſius G C dupla [2]. [1] *per 4 ſexti.*

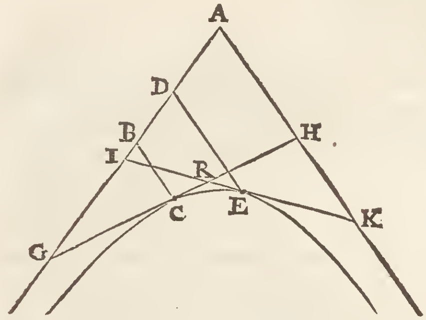


erit quoque tam G A ipſius G B quàm A H ipſius B C dupla, ideoque [3] rectangulum G A H rectanguli G B C ſive A B C quadruplum. Eodem modo rectangulum I A K rectanguli A D E quadruplum oſtendetur. Hinc cum æqualia ſint rectangula A B C, A D E [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula G A H & I A K æqualia. Quod eſt primum.

[2] *per 6 hujus.* [3] *per 20 ſexti.* [4] *per 3 hujus.*

Unde cum [5] ſit ut G A ad A K, ita I A ad A H, triangula quoque [5] *per 16 ſexti.*

6 per 15 sexti. queG A H, I A K æqualia erunt[6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod eſt ſecundum.



7 per 16 quinti. 8 per 17 quinti. Ac cum permutando [7]quoque ſit G A ad I A, ut A K ad A H: erit & [8]dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod eſt tertium.

9 per 15 sexti. Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, reſidua, nempe triangula G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt[9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id eſt, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod eſt quartum.

10 per 18 quinti. 11 per Coroll. 19 quinti. Unde cum componendo [10]quoque ſit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, ſumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I ad I R: erit & per converſionem rationis [11] C H ſive G C ad C R, ut E I ſive K E ad E R. Quod eſt quintum. Atque ita demonſtrata ſunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

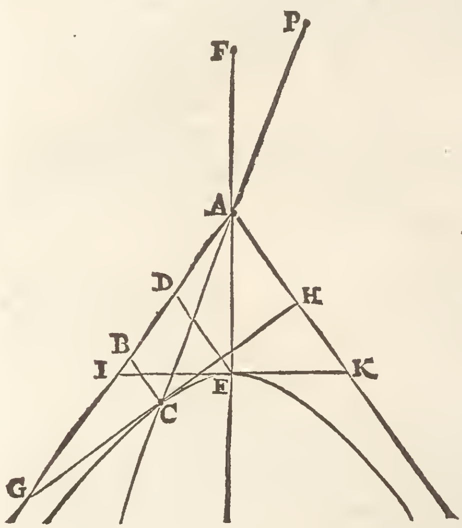
Propoſitio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum ſecundæ ad quadratum tranverſæ diametri, ſive ut parameter ad tranſverſam diametrum, ita quadratum cujuſlibet ordinatim applicatæ ad rectangulum ſub ejuſdem diametri partibus, utroque tranſverſæ termino & applicatâ interceptis, comprehenſum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Aſymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus ſecunda diameter tranſverſæ P C conjugata ſit G C H, parameter verò C I, ipſis nempe P C, G H tertia proportionalis, & ſit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet D N: dico esse ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut E B N D F, cum sit [2] F N quadratum ad H C quadratum, id est [3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo [4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum [5] ad C A quadratum, & permutando [6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, sive [7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est, ut I C ad C P. Quod demonstrandum erat.



[1] per Corol. 20 sexti.
[2] per 4, & 22 sexti.
[3] per 1 Corol. 6 hujus.
[4] per 6 secundi, & 17 quinti.
[5] per 6 secundi.
[6] per 16 quinti.
[7] per 15 quinti.

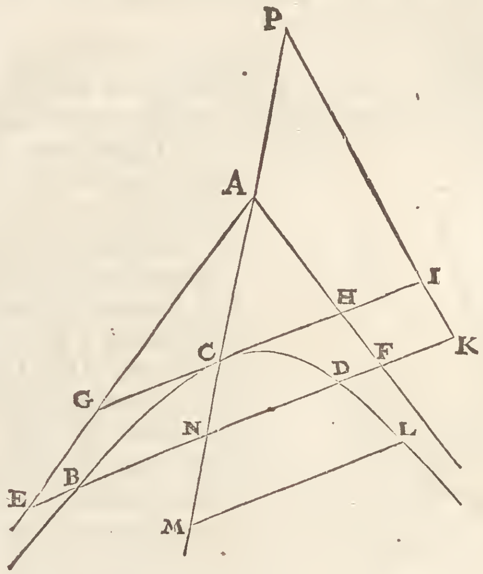
Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut B C D, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quâcunque A N quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; si, productâ N A ad P, ut A P ipsi A C sit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit P N C rectangulum ad B N quadratum, sicut A C quadratum ad quadratum abs C G seu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Asymptoti quæsitæ [9].

[8] per 7 Coroll. 5 hujus.
[9] per conversum 10 hujus.

Corollarium. 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet applicatæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale esse. Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:



[1] per 10 hujus conv.

[2] per 4 sexti.

[3] per 1 sexti.

[4] per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis, ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C; cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

[5] per 10 hujus.

[6] per 16 quinti.

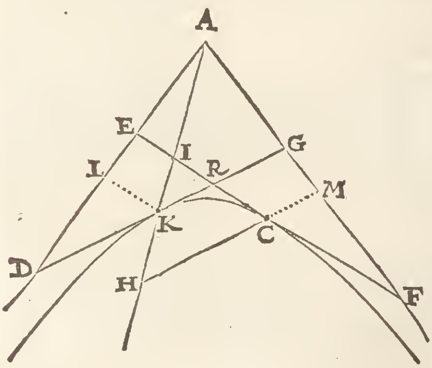
THEO-

THEOREMA X.

Propoſitio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abſciſſis æquale ſemidiametri tranſverſæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque ſumpto recta E C F, Aſymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata ſit C H, quæ producta Aſymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato ſemidiametri K A, ſive, quod idem eſt [1], continuè proportionales eſſe H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque interſectionis puncto R, cum ſit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc eſt [3], M G ad M F, ut L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] ſit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id eſt [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc eſt [8], ut K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonſtrandum erat.

[1] per 17 ſexti.

[2] per 2 Cor. ſexti, & 9 hujus.

[3] per 2 ſexti.

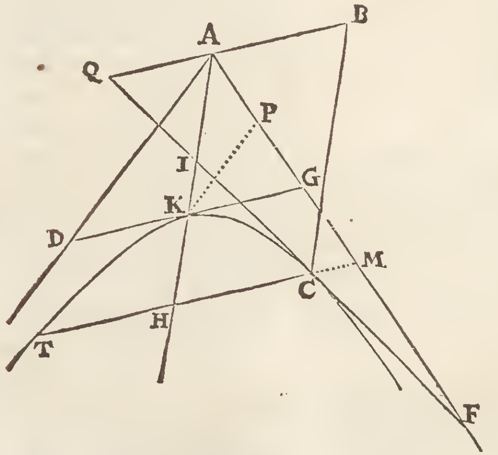
[4] per compoſitionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 quinti. [5] per 9 hujus. [6] per 22 quinti. [7] per 2 ſexti. [8] per 2 ſexti. [9] per 18 quinti.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.



[1] *per 7 hujus.*

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymptoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum ſeu

[2] *per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.*
[3] *per 4 & 22 ſexti.*

ſeu [1] ad T M C rectangulum, ut H A ſeu C B ad I A, id eſt [2], ut B Q ad A Q; erit dividendo [3] H C quadratum ſeu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea [4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q [5] quadrato K G æquale. Quod demonſtrandum erat.

[1] *per 1 Cor. 6 hujus.* [2] *per 4 ſexti.* [3] *per 17 quinti.* [4] *per Cor. 20 ſexti.* [5] *per 17 ſexti.*

Corollarium ad duas propoſitiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti K, inventis Aſymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Aſymptoto parallelâ, ut K P, ac ſumptâ P G ipſi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K [7]. quoniam uti G P ipſi P A, ita G K ipſi K D æqualis eſt [8].

Eodem modo, ſi datum punctum ſit in Aſymptotorum alterutra, veluti G, diviſâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Aſymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta G K D [10] Hyperbolam in puncto occurſus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Aſymptotis comprehenſum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, ſumptâque A H ipſis A I, A K tertiâ proportionali, ſi per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidiſtet [12]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps ſunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A ſecundâ diametro Q A B, tranſverſâque ipſi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipſi Q A B æquidiſtantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Aſymptoto terminatâ; ſi fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad ſecundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipſi A K æquidiſtans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifeſtum porrò eſt, ſi datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non poſſe [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non ſecet.

[6] *per 1 Cor. 10 hujus.* [7] *per 6 hujus.* [8] *per 2 ſexti.* [9] *per 2 Cor. 3 hujus.* [10] *per 2 ſexti, & 6 hujus.* [11] *invento per 7 Corol. 5 hujus.* [12] *per 3 Cor. 6 hujus.* [13] *per 11 hujus.* [14] *per 7 hujus.* [15] *per 12 hujus.* [16] *juxta 1 Cor. 3 hujus.*

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, ſi opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* ſumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

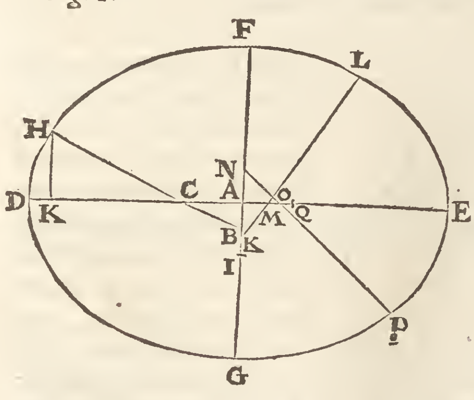
Deſcribentem in ſtatione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* eſt perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum eſto, ac cùm de iis ſimpliciter ſermo erit in ea ſtatione conſiderabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

Ut ſi trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, ſimulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C ſemper ſint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuêre, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet ſui puncto, ex. gr., H, aſſumpto, prout placuerit, ſive in ipſa B C, ſive in eadem producta, (ut à nobis plerumque aſſumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) deſcribat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, ſimulque H proceſſerit ad F, deſcripta ſit per motum puncti

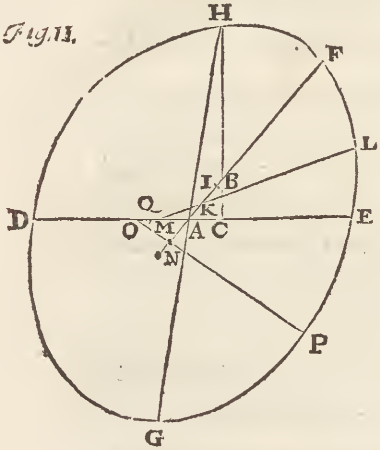
Fig. 1.



 H cur-

H curvæ portio H F: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus F L: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus L E: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus E P: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva H F L E P G D: erunt

Fig. II.



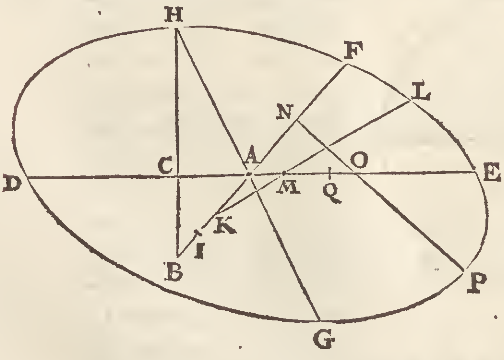
B C, quæ & in aliis stationibus est I A, K M, A Q, N O, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

H C & H B utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, A C, utrinque, si opùs fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam A D quàm A E æqualis sit rectæ H B, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota D E *directrix* erit.

Cum autem *describens* B C eidem *directrici* D E est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure A B, uti A I, *angulo* nempe existente recto, ut in ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repræsentat. [a] in casu fig. I & similib. [b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuslibet H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G [a] vel H A G [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E. [a] in casib. fig. I, II, & similibus. [b] in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit [a], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale sit dimidiæ *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [1], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut L I quadratum ad L N quadratum, id est [4], ad D I E rectan- [1] *per* 34 *primi.* [2] *per* 47 *primi, &* 5 *secundi.* [3] *per* 4 *&* 22 *sexti.* [4] *per supra demonstr.*

 gulum,

Fig. I.

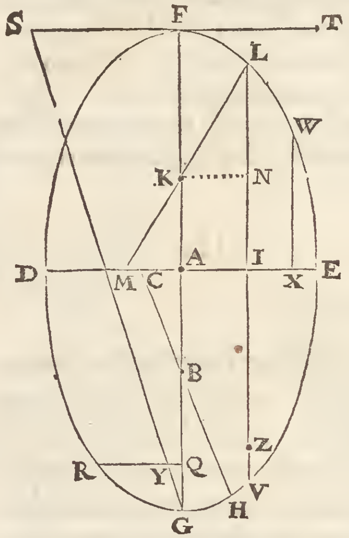
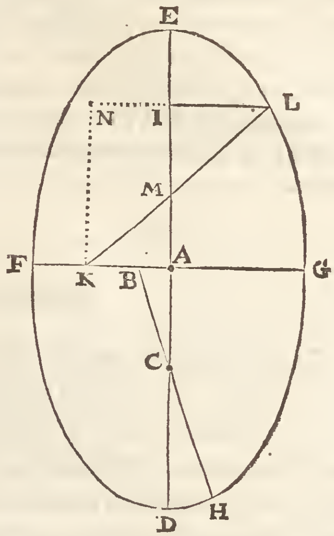
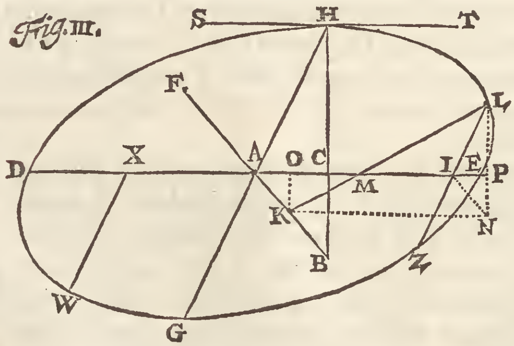


Fig. II.



[1] per 15 *quinti.* gulum, ita L M quadratum ad L K quadratum, hoc eſt, ita F A quadratum ad A E quadratum, ſive [1] ut F G quadratum ad D E quadratum, conſtat priori caſu propoſitum.

Fig. III.



Non ſit deinde *angulus* B A C rectus [b], ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, ſi opùs fuerit, rectæ K O, L P *deſcribenti* B C parallelæ, ideoque ad *directricem* D E perpendiculares, ut & I N lateri A B parallela, quæ ipſi L P, eidemvè productæ, ſi opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] ſimilia ſint triangula A H C & I L P, item-

[2] per 29 *primi.*

que

Fig. IV.

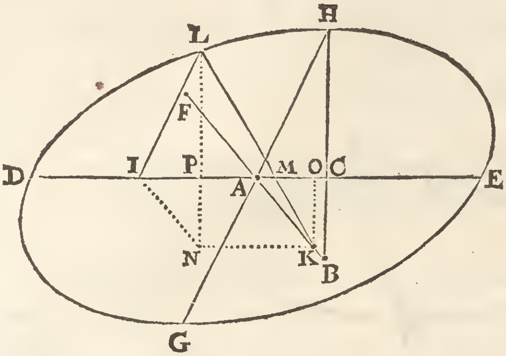


Fig. V.

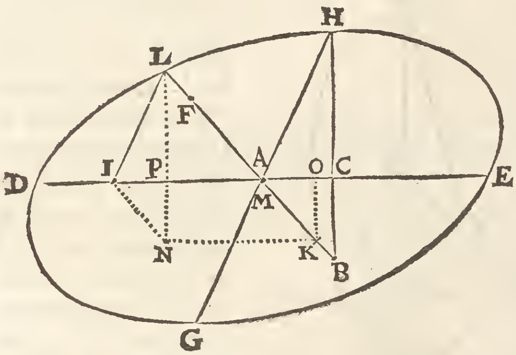
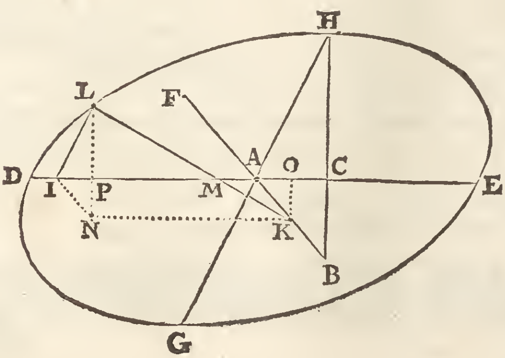


Fig. VI.



que A H B & I L N, ac denique jungatur K N. Quoniam itaque est [1], ut B A ad K A, sive ut B C, id est, M K, ad K O, ita M L, hoc est, H C, ad L P; ut autem H C ad L P, ita H A ad L I, & ita B A ad N I, ac per consequens B A ad K A, ut eadem B A ad N I: erit [2] K A ipsi N I æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypothesi. Quare & A I, K N æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales sint rectæ K L & A E vel A D, ideoque & ipsarum quadrata, hinc subductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum K N ab una, ac quadrato A I ab altera parte, erunt

[1] per 4 sexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

Fig. VII.

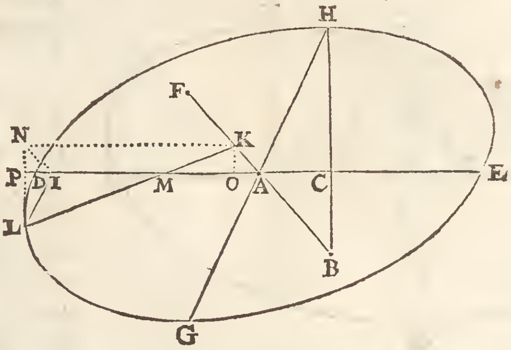
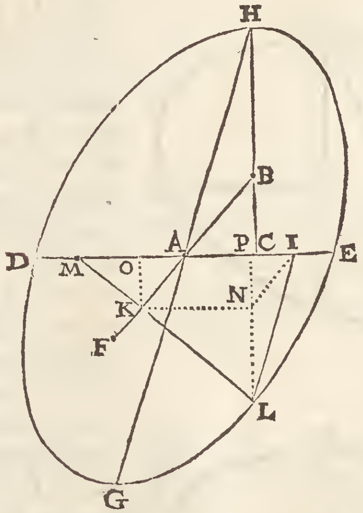


Fig. VIII.



[1] *per 47 primi, & 5 secundi.*
[2] *per 4 & 22 sexti.*
[3] *per supra demonstr.*
[4] *per 15 quinti.*

erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonſtratum eſt,) quadrata rectarum quæ alteri ipſarum applicantur alteri æquidiſtant, ita ſe habeant ad rectangula ſub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejuſdem quæ per applicatas ſecatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ inſiſtunt, ttanſverſa; illa verò, cui eædem æquidiſtant, ſecunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipſi terminatæ, diametri ſimpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ tranſverſæ ſecundæque diametro tertia eſt proportionalis, Latus Rectum ſive Parametrum vocabimus ad tranſverſam diametrum pertinentem.

Notandum tamen eſt, ſi *angulus* rectus ſit, ac *punctum* ab utroque *deſcribentis* termino æqualiter diſtet, curvam, quæ motu ejuſdem *puncti*, uti prædictum eſt, deſcribitur, circumferentiam Circuli eſſe.

Corollarium. I.

Ex ipſa demonſtratione & collatione figuræ primæ cum ſecunda manifeſtum eſt: in Ellipſi, conjugatorum axium tranſverſum etiam ſecundum eſſe, & contra. Sive enim L I vel huic vel illi axi applicata ſit, eodem modo ſemper probabitur eſſe quadratum ejuſdem applicatæ ad rectangulum ſub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam ſecatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc eſt, eam, quæ per terminum ſecundæ diametri tranſverſæ æquidiſtans ducitur, Ellipſin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem ſeca-

Fig. I.

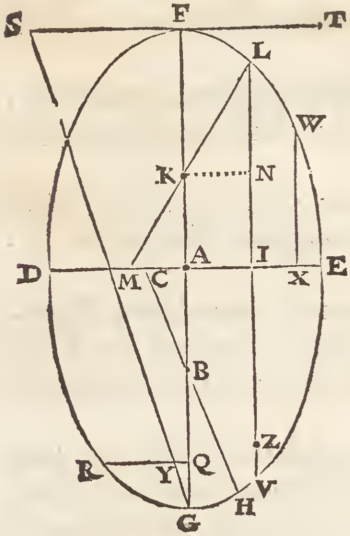
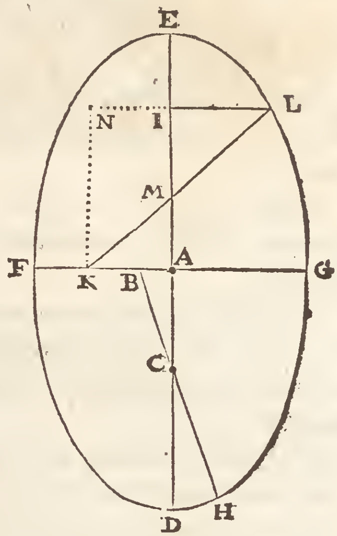


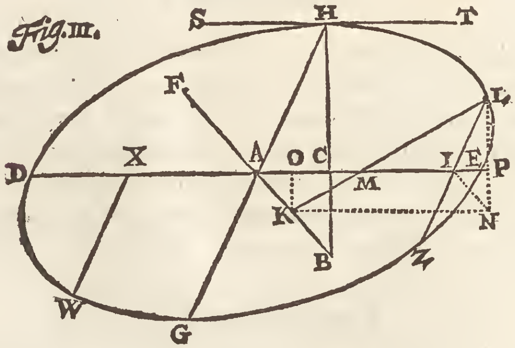
Fig. II.



re. Si enim per F[a] aut H[b] terminum ſecundæ diametri GF[a] vel GH[b] ductâ rectâ S T, tranſverſæ diametro D E paralle-

[a] in caſu fig. I & ſimilib.
[b] in caſu fig. III & ſimilib.

Fig. III.



lâ, aſſumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod deſcriptum ſit *deſcribente* in ſtatione K M, ducaturque

L I

LI[a] vel LP[b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI[a] vel MLP[b] recta ML, id est, perpendicularis FA[a] vel HC[b], major sit[1] quàm LI[a] vel LP[b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F[a] aut H[b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.
[1] per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum[2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG[a] vel HG[b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

[2] per 13 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est[3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit[4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

[3] per Cor. præced.
[4] per 9 quinti.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ[5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

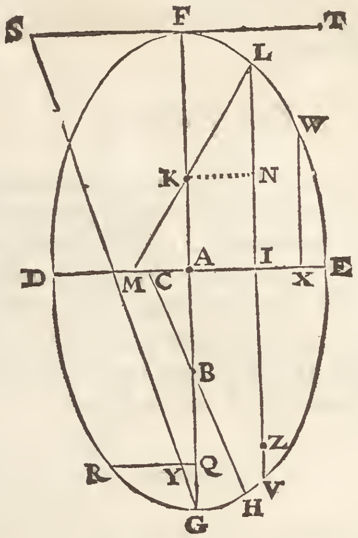
[5] per Cor. præced.

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ diametri, a in casu fig. I & similib.

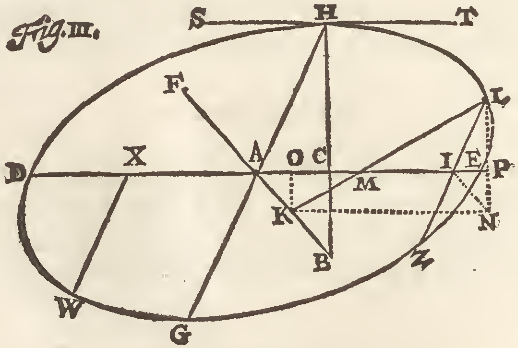
metri, ut puta F G[a], eductâ parametro F S secundæ diametro D E parallelâ, jungatur S G, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut R Q, quæ secet junctam S G in Y: fore rectangulum F Q Y quadrato applicatæ R Q æquale.

Fig. III.



1 *per* 13 *hujus.*
2 *per Cor.* 20 *sexti.*
3 *per* 1 *sexti.*

Quoniam enim est [1] G F quadratum ad D E quadratum, id est [2], G F ad F S, sive G Q ad Q Y, hoc est [3], G Q F rectangulum ad

Y Q F

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum ad R Q quadratum: id eſt, ſi veterum Geometrarum more id proponi placeat.

[1] *per 13 hujus.*
[2] *per 9 quinti.*

Quæ ab Ellipſi ad diametrum applicatur poteſt ſpatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipſam applicatam & diametri verticem abſcinditur, deficiensque figurâ ſimili ſimiliterque poſitâ ei quæ lateribus tranſverſo rectòque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuſlibet diametris conjugatis, Ellipſis in plano deſcribatur.

Ut ſi conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipſis ſit deſcribenda, *deſcribente* B C, quæ ſemi-axium A D, A F differentia ſit, *intervallis* verò H C, H B, ipſis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva deſcribatur, eritque hæc ipſa Ellipſis quæſita.

[a] in caſu fig. I & ſimilib.

At ſi aliis quibuſlibet conjugatis diametris, obliquè ſeſe interſecantibus, ut D E, H G [b], Ellipſis ſit deſcribenda: demiſsâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, ſumptâque in eadem ſeu in ipſa producta, ſi opùs fuerit, rectâ H B ipſi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, ſi *deſcribente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipſis deſcribatur, erit hæc ea ipſa quæ quæritur.

[b] in caſu fig. III & ſimilib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipſam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ ſint: ſimul quoque innoteſcit, quo pacto & illis datis Ellipſis deſcribatur.

THEOREMA XIII.

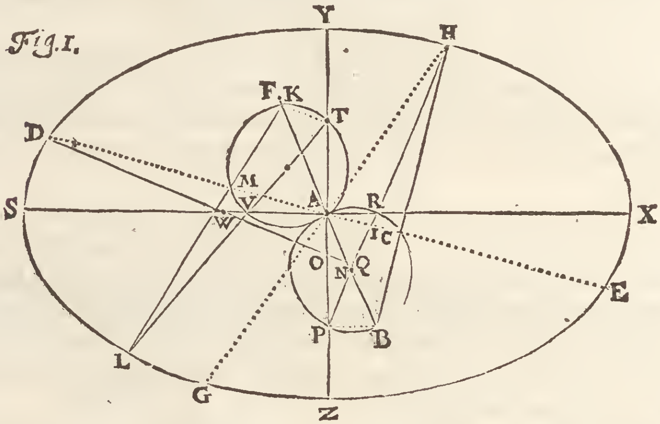
Propoſitio 14.

In Ellipſi circa quoſcunque axes deſcriptâ, ducta quælibet diameter tranſverſa eſt, habetque ſecundam ſibi conjugatam.

Sit in Ellipsi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter D A E; & sic describens O W in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi W A O deinceps sunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipsis A W, A O reciprocè sint æquales, nimirum A R ipsi A O, & A P ipsi A W, ac proinde triangulum W A O [1] simile & æquale triangulo P A R, ab Ellipseos puncto H, quod describenti P R in directum est, ducta sit diameter altera H A G. Dico diametrum D E transversam esse, H G autem secundam ipsi D E conjugatam: id est, si, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

[1] per 4 primi.

Fig. I.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur H B ipsi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in D E, & H G [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione T V, diametro T V circulus describatur, qui, propter angulum T A V rectum [a], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque B A F & D A E

[2] per 13 hujus ejusque Corol. 7

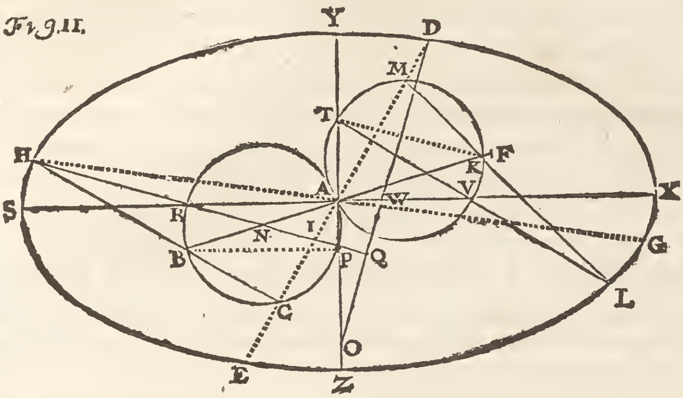
[a] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coincidit, uti est casus in fig. VI

[3] per conversam 31 tertii.

D A E alibi etiam secabit [b], uti in K & M. Deinde junctâ K M, eaque productâ versùs L, agantur T K, P B.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.

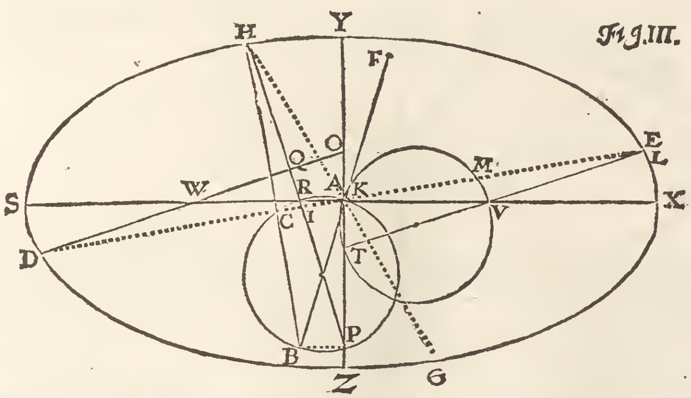
Fig. II.



Cùm igitur ipsarum D O, H P, productarum, si opùs fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli O Q P cum utroque triangulorum O A W, R A P [c], notato ipsarum D E, P H intersectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, si puncta O & P coïncidant, ob angulos A O W, A P R semirectos.

Fig. III.



I Q D, I C H æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula O D A, P H B latera O D, D A lateribus P H, H B, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [1] basis O A,

[1] per 4 primi.

O A, sive recta A R, basi P B, angulusque D O A, id est P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipsi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis A B basi P R, seu describenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B descriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipsis T K M, K T V, uterque utrique, æquales sint, nempe P B C ipsi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C seu T A M [5] binos rectos constituit [e], & B P R ipsi

[1] *per 27 primi.*
[2] *per 4 primi.*
[3] *per conversam 31 tertii.*
[4] *per conversam 21 tertii.*

[d] pro casu fig. II adde: ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] *per 22 tertii.* [e] in casu fig. II uterque angulo P A C seu T A M æqualis est *per 20 tertii.* In casu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos constituit, nempe hic *per 13 primi*, & ille *per 22 tertii.* In casu fig. IV æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, posterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales sunt *per 32 tertii*) binos rectos constituit *per 22 tertii.* In casu fig. V, T K M sive T A M æqualis est angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos constituit *per 13 primi & 20 ac 22 tertii.* In casu fig. VI æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis est ei, qui in segmento A V M constitueretur *per 32 tertii*, quorum quidem prior cum angulo P B C, posterior verò cum angulo T K M binos rectos constituit *per 22 tertii.*

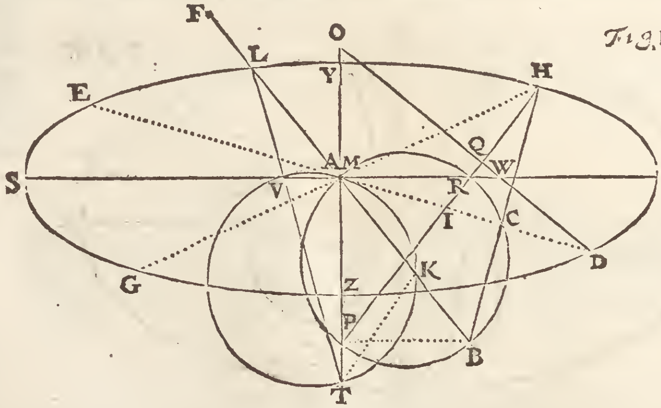


Fig. IV.

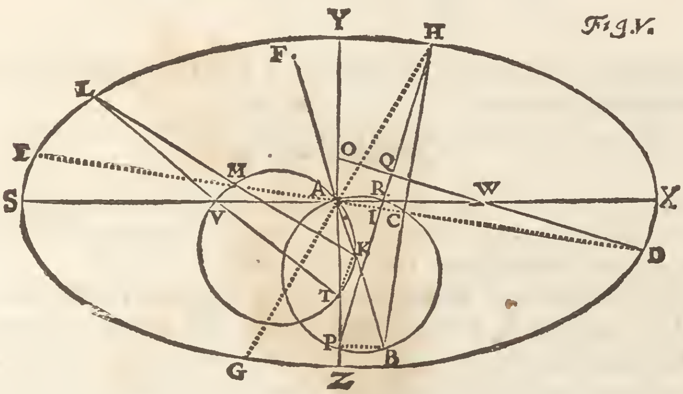
K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R seu K A V sive F A V æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum subtensæ, nempe

[6] *per 20 tertii*, atque in casu fig. III per eandem & 32 *tertii.* [f] In casibus fig. I V & V tam angulus B P R seu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos constituit *per 13 primi, & 22 tertii.* [7] *per 26 & 29 tertii.*

pe latera P B, T K dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia [g] : apparet sicuti rectæ B C, P R productæ concurrunt in H, ita quoque rectas K M, T V productas, & quidem, cum ipsi P H æqualis sit T L, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [1] similia atque in totum æqualia sunt triangula B P H, K T L, adeoque & latus K L lateri B H æquale. Est autem [2] & subtensa K M subtensæ B C æqualis [h], ob æquales an-

[g] In casu fig. III. ubi recta B A F tangit circulum T K V, æqualia sunt latera B P, T K ob angulos B A P, T V K æquales *per 32 tertii.* In casu fig. V I, ubi recta P A Y contingit circulum T K V, æquales sunt subtensæ B P, T K ob angulos P A B, T M K æquales *per 32 tertii.* [1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* [h] In casu fig. I I I, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento K T M æqualis foret angulo F A M seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. IV, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus K T M æqualis est angulo K A C seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. V, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus in segmento B C æqualis foret angulo K A M, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo C A B duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii.*

Fig. V.



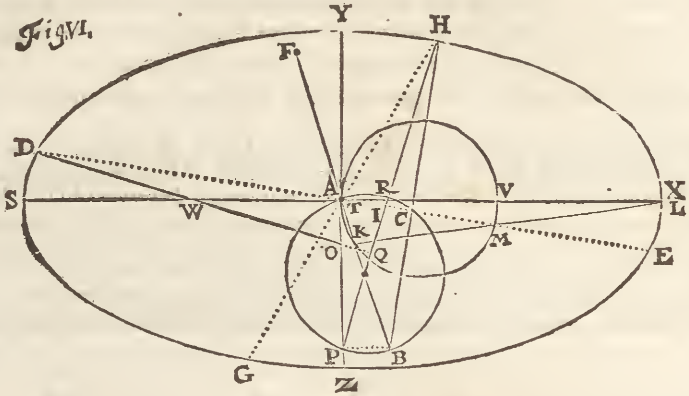
gulos K A M, B A C. Quocirca & L M ipsi H C æqualis erit. Unde cum describens sit K M, utpote ipsi B C æqualis, ac constituta in angulo K A M (qui cum ipso B A C vel idem [i], vel ei ad verticem [k], vel denique ipsi deinceps est [l]) aut certè cum alterutro crurum coïncidens [m], atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla H B, H C intervallis L K, L M: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin S Y X Z, esse in Ellipsi, quæ in angulo B A C, intervallis H B, H C, describitur, ideoque alteram alteri per

[i] ut in casu fig. VI.
[k] ut in casibus fig. I. & II.
[l] in casu fig. V.
[m] ut in casibus fig. III. & IV.

[1] per 13 hujus, ejusque Cor. 7.

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem eſt, conjugatæ dia-

Fig. VI.



metri erunt, nimirum D E tranſverſa, & H G ſecunda. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium. I.

Hinc colligitur non ſolùm Ellipſes omnes ſuos habere axes, ſed & quo pacto datis quibuſlibet diametris conjugatis, ejus Ellipſeos cujus diametri ſunt, axes inveniantur.

Ut ſi cujuſcunque Ellipſeos conjugatæ diametri ſint D A E & H A G, ductâ H B, ſemidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipsâ bifariam in N divisâ, ſi centro N intervallo N A vel N B circulus deſcribatur, ſecans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R ſemi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum poſitæ, ſicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac poſitione quæſitos axes ejuſdem Ellipſeos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri exiſtunt.

[2] per 4 primi.

Ductâ enim P B, ſumptâque A O ipſi A R, ideoque [2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipſi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum deſcriptus circulus etiam per C

[3] per 31 tertii.

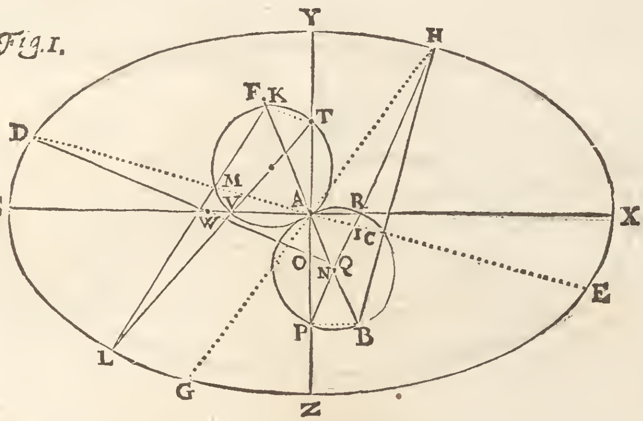
tranſeat [3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uterque

que cum angulo [a] P A C ſeu P B C duos rectos conſtituit [1]. Unde cum triangula O A D, P B H latera O A, A D lateribus P B, B H, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] baſis O D baſi P H, id eſt, rectæ S A vel A X, ut & angulus A O D angulo B P H ſeu [3] P R A æqualis. Hinc cum æqualia ſint triangula R A P, O A W, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] R A P, O A W rectos, nec non latera R A & O A æqualia: erit etiam [5] latus A W lateri A P, ut & latus O W ipſi P R æquale. Quocirca cum [6] *deſcribentes* ſint

[a] nimirum *cum angulo* P A C in caſu fig. I. & ſimilibus, & *cum angulo* P A C *ſeu* P B C, in caſu fig. II. & ſimilibus.

[1] *per* 13 *primi &* 22 *tertii.* [2] *per* 4 *primi.* [3] *per* 29 *primi.* [4] *per* 31 *tertii &* 13 *primi.* [5] *per* 26 *primi.* [6] *per* 13 *hujus.*

Fig. I.



O W, P R ejus Ellipſeos, cujus axes ſunt S X, Y Z, & quidem in ſtatione reciproca conſtitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifeſtum eſt ex ſuperiori demonſtratione, Ellipſin, quæ axibus S X, Y Z deſcribitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ ſunt D E & H G, omnino eandem eſſe:

Atque ita, quæ de Ellipſi, circa quoſcunque axes deſcripta, ſuperiori Theoremate propoſita ac demonſtrata ſunt, etiam cuilibet Ellipſi, & circa quaſcunque diametros conjugatas deſcriptæ, convenire, manifeſtum eſt.

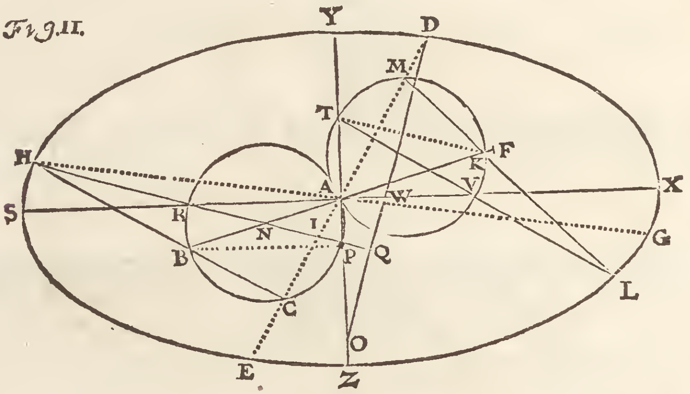
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem esse, cum utraque *intervallo* H B æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum D E, H G transversa sit D E, & H G se-

Fig. II.



[1] *per* 14 *hujus ejusque Corol.* 1.

cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter [1] transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque H G transversa. At verò & D E secundam esse ipsi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

[2] *per* 2 *Cor.*13. & 3 *Cor.*14 *hujus.*

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit [2].

Co-

Corollarium 5.

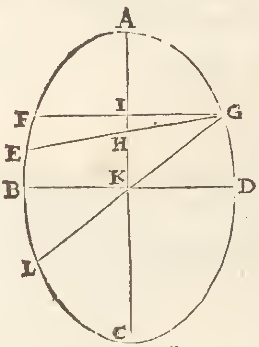
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipſeos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipſin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipſin cadere[1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere[2] poſſit.

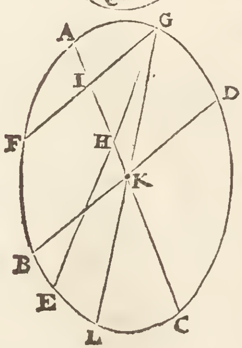
1 per Cor. præcedens.
2 per 5 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XIV.

Propoſitio 15.

Quæ bina quælibet Ellipſeos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc eſt, conjugatæ diametro æquidiſtans.





Si enim in Ellipſi ABCD, cujus centrum K, à diametro AKC bifariam divideretur recta EHG, quæ neque per centrum tranſeat, neque conjugatæ diametro BD æquidiſtans ſit; applicatâ ordinatim GIF, ductâque per centrum rectâ GKL: Quoniam eſſet, ut GH ad HE, ita tam GI ad IF[3], quàm GK ad KL[4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque AC parallela[5]; ideoque ad alteram ipſi conjugatam, nempe ad BD, ordinatim applicata[6], atque Ellipſi in tribus punctis occurreret; quod fieri non poſſe ſupra[7] oſtenſum eſt.

3 per 4 Cor. 13 hujus.
4 per 2 Cor. 14 hujus.
5 per 2 ſexti.
6 per 13 & 3 Cor. 14 hujus.
7 in 5^to Coroll. 13 hujus.

Corollarium 1.

Ideoque ſi diameter rectam quamlibet in Ellipſi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit[8].

8 per 4 Cor. 13, & 15^tam hujus.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumve diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] per 1 Cor. 15 hujus.

[2] per 1 Cor. 14 hujus, alterve, ut cuilibet obvium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] per 5 Cor. 14 hujus.

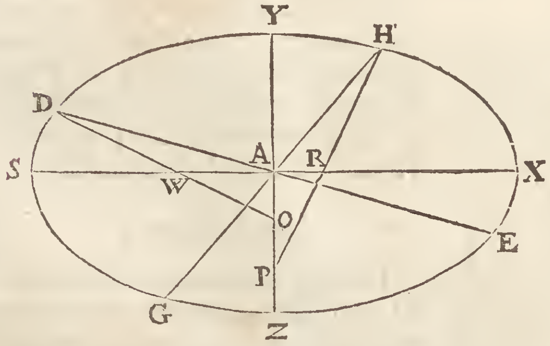
[4] per 15 hujus ejusque Cor. 1.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri SA æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-



[5] per 2 Cor. 15 hujus.

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipſis A W, A O ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta P R Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta H A G, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14^{tam} hujus libri demonſtrata ſunt, eandem H A G eſſe diametrum ipſi D E conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

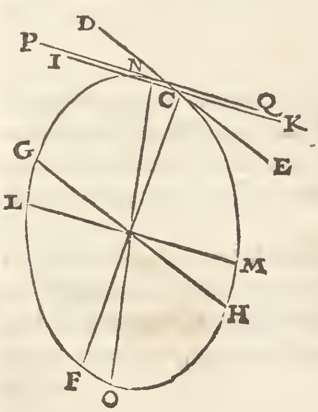
Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans: erit eadem recta [2] contingens quæſita.

[1] *per 16 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 14 hujus.*

Theorema XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata ſit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidiſtanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori C F

[1] per 4 Cor. 14 hujus. [2] per 2 Cor. 13 hujus. [3] per idem Coroll.

CF diversa sit[1], punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipsi L M, ideoque & contingenti I C K, æquidistans ducta sit P Q. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta I C K infra rectam P N Q: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta P N Q, infra contingentem I C K: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo I C K Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

[4] per Coroll. præcedens. [5] per 4 Cor. 13 hujus.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; aç proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi[5], & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

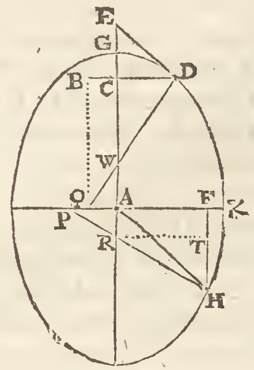
Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

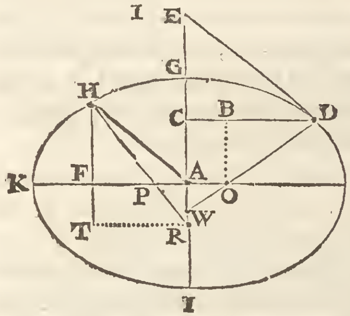
Quamcunque Ellipsin G D, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta D E, diametro I G occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C: dico rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter I G, sitque O W *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut O D *intervallum* semi-axi A G æquale sit, P R autem *describens* in statione, ipsi O W reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod

nempe

nempe *describenti* P R in directum est, ducta diameter H A conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad secundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipsis A G, A K æquidistantes, quæ applicatis D C, H F, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.





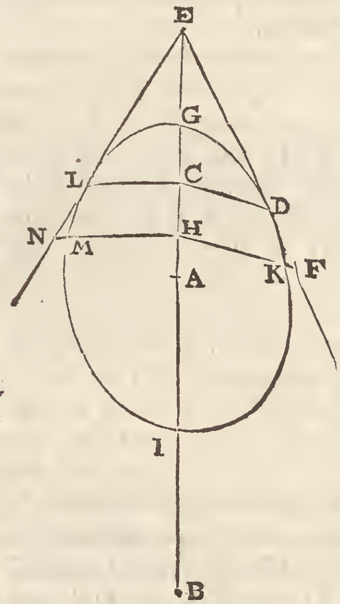
Itaque cum similia sint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] similia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia sunt. Quare & latera W C & R T sive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W sive A F, id est [9], E C ad H F sive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales sint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O sive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc est, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato semi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam D E Ellipsin contingere non possit [16], patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum C A E æquale sit quadrato semi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipsi ocrurrat in D, junctam E D esse contingentem.

Deinde non sit recta I G Ellipseos G D axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab assumpto in curva

[1] per 4 Cor. 14 hujus.
[2] per Cor. 17 hujus.
[3] ex constructione.
[4] per 29 primi, & 21 sexti.
[5] ex constructione.
[6] per 26 primi.
[7] per 29 primi.
[8] per 4 sexti.
[9] propter triangula E D C, H F A æquiang.
[10] propter triangula D C W, D B O æquiangula.
[11] per Cor. 20 sexti.
[12] per 18 quinti.
[13] per 47 primi.
[14] per Cor. 20 sexti.
[15] per 17 sexti.
[16] per 17 hujus.

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opùs fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] *per sup. demonstr.*

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin, G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D in

[2] *per 13 hujus, & Cor. 20. sexti.*
[3] *per 9 quinti.*
[4] *per 4 sexti.*
[5] *per 14 quinti.*
[6] *per 17 hujus.*

in D. contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata ſit D C, rectangulum C A E quadrato ſemidiametri A G æquale eſſe.

Corollarium.

Ex dictis perſpicuum eſt, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda ſit recta, quæ Ellipſin contingat.

Si enim datum punctum in ipſa curva ſit, veluti D: jam ſupra [1] oſtenſum eſt, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato ſemidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At ſi extra Ellipſin ſit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipſin ſecet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidiſtet contingenti quæ per G duceretur [5], occuratque Ellipſi in D, jungatur E D: eritque hæc ipſa tam priori quàm poſteriori caſu [6] contingens quæſita.

A puncto autem intra Ellipſin dato non poſſe duci rectam, quæ eandem contingat, manifeſtiſſimum eſt.

Atque ita me compendioſè viâ ſatis planâ ac maximè naturali, abſque ulla ſolidi conſideratione, Elementa proprietateſque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni ſectiones* appellavêre, tradidiſſe confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipſin pertinent, abſque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per ſe ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hiſce diutiùs inhærere ſupervacuum putem, præſertim cum inſignis & ſublimior quædam ſcientia ſuperſit, cui Veteres enixiſſimè incubuiſſe ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifeſtum eſt; quæque tam ab iiſdem

[1] *in Cor. 16. hujus.*
[2] *per 2 Cor. 15. hujus.*
[3] *inventum per 2 Coroll. 15 hujus.*
[4] *juxta Cor. 17. hujus.*
[5] *per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.*
[6] *per 18 hujus.*

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* ſive *Compoſitio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæteriſque Geometris ea præcipuè conſcripta eſſe, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis ſuperaddidere, omnino credibile eſt. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac diſtinctionem, ut & diſtributionem in ſua genera & ſpecies, cum ſegregatione earum, quæ verè Geometricæ non ſunt, ab iis quæ in Geometriam ſunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam exiſtimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc ſubjungere, non quidem eâ methodo, ſicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem ſufficeret, ſi vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id eſt, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipſis*, ſive *circuli circumferentia* exiſtunt, (quorumque Locorum Compoſitioni eos ſolummodo intentos fuiſſe invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immenſum excreſceret, ſi ad Loca, quæ ſunt lineæ curvæ ſecundi generis, uti nobis propoſitum eſt, extenderetur; ſed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino caſus poſſibiles reſolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem ſumus obſervaturi, ut jam poſt explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſis, (ſuppoſitâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ ſunt vel ex prædictis curvis conſtant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

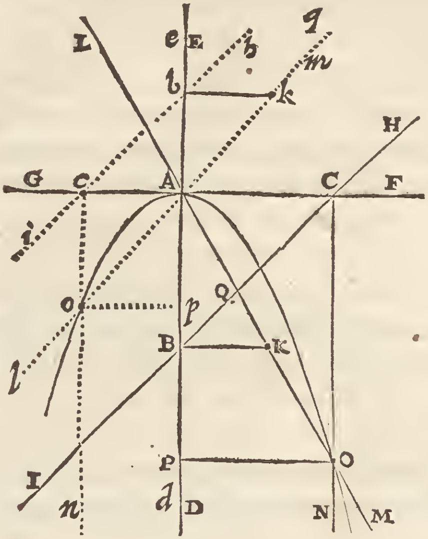
Caput IV.

Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque isosceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm basis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito cruri æquidistans, ut B K, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G insistens C N ipsi D E parallela transeat per ipsarum F G & H I intersectionem C. Dico, si angulus E B H atque ipsi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B semper applicatum maneat rectæ D E, simulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, sibi ipsi semper æquidistan-

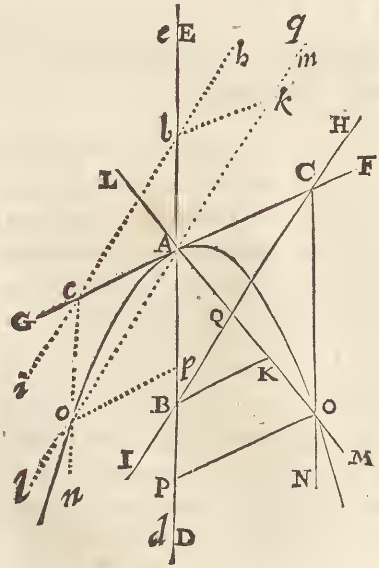
 tem,

tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædictam L M, per punctum K ſemper tranſeuntem, interſectionem ipſarum C N, LM, quæ ſit ad O, Parabolam deſcribere, cujus diameter eſt AD, parameter KB, ac F G eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim ſtatione conſtitutus fuerit angulus EBH ſeu DBI, ſi interſectio rectarum F G, HI deſignetur per C, atque ab interſectionis puncto O ad diametrum applicata ſit O P ipſi F G æquidiſtans: erit ſemper KB ad B A, hoc eſt, ad A C, uti eadem A C ad C O[1]: ac proinde [2] rectangulum ſub KB, C O, id eſt [3], ſub K B, A P quadrato rectæ A C, hoc eſt [4], ipſius O P æquale. Unde ſi B A C angulus rectus fuerit, erit A D axis, ſin minùs, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipſi B A C vel B A G angulo æquales.

[1] *per 29 primi, & 4 ſexti.*
[2] *per 17 ſexti.*
[3] *per 34 primi.*
[4] *per eandem.*



In tranſitu etiam hîc notandum eſt, eodem illo motu per interſectionem ipſarum H I, L M, puta Q, Hyperbolam ſive oppoſitas

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum B A C isosceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B sed ubivis in recta A D educta esset, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*; & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, descripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis sit, centro A & intervallo A K circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ad *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, sibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Asymptotos esse [b].

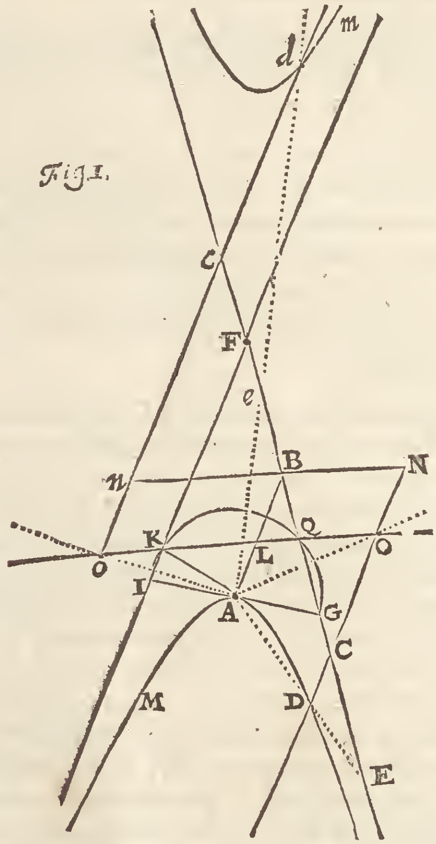
Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *describens*, ut O D, in statione uti fuêre, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli A I K, A K I inter se [1], nec non simul sumpti angulo K A G, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos constituunt): erunt quoque anguli A I K seu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [c]; ideoque sicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V. exhibito. [b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F in priori, & G F in posteriori eum contingere cernitur. [1] per 5 primi. [2] per 13 & 32 primi. [3] per 28 primi. [c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus est, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

rent describentes A L & O D, utpote ipsi I K F æquidistantes. Sint itaque ipsarum occursus in B & C, ac per B agatur recta B N directrici K O æquidistans, occurrensque describenti D O in N: eritque ut G A ipsi A I, ita [1] G B ipsi B F æqualis. Cum

[1] per 2 sexti, & 14 quinti.

Fig. I.



autem in triangulis L A K, O Q C æquales sint anguli ad L & O, (propter [2] A L, C O parallelas,) sitque & angulus L A K sive G A L, id est, G I F, æqualis angulo O Q C, (quippe tam hic quàm ille cum angulo K Q G, vel K Q E duos rectos constituit

[2] per 29 primi.

tuit[1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC sive [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hîc quàm ille cum angu-

[1] *in I & II fig. per 13 primi, & ; 2 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

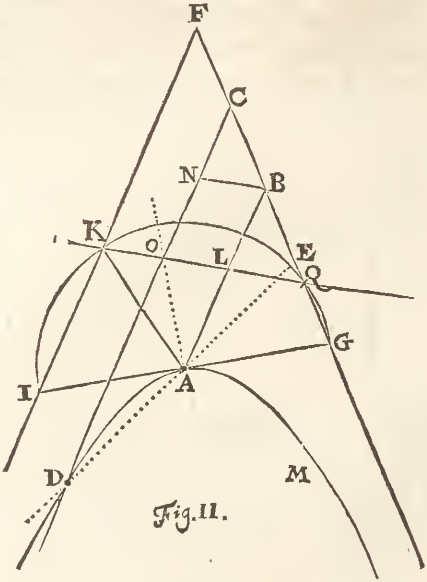


Fig. II.

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii : ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.
[2] *per 29 primi.*

lo IGQ sive IGF[3] binos rectos consti-

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.*

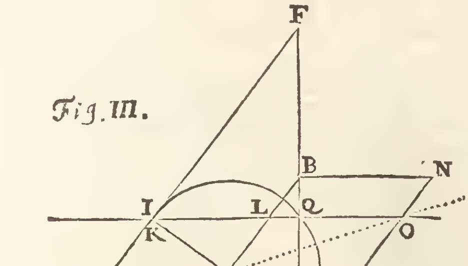
tuit[e],) atque angulis LAG, OAD vel OAE iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi OAG[f], compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quoque sunt, ac LO, AO sibi mutuò occurrant; GE quoque & AD sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO sive NB ad GE. At verò

[e] in fig. II angulus AGE angulo ALO est æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in casu fig. II & similibus, BAE.

[4] *per 4 sexti permut.*

Fig. III.



1 per sup. dem.
2 per 4 sexti.
3 per 11 quinti.
4 per 9 quinti.
5 per sup. demonstr.

(ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

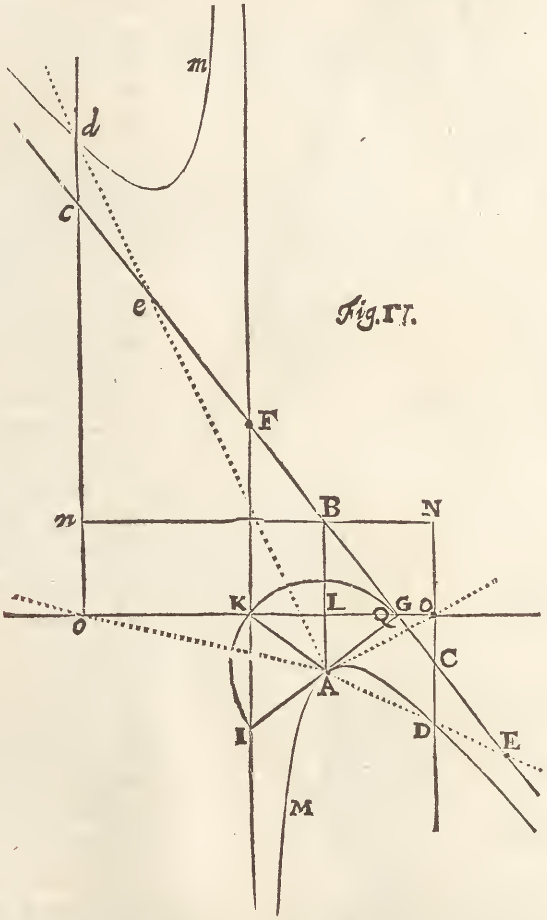


Fig. 17.

6 per 29 primi.
7 per 4 sexti.
8 per sup. demonstr.

ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

9 per 16 sexti.

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [1] curvam D A M Hyperbolam esse, cujus Asymptoti F I, F G. Quod erat ostendendum. [1] per 3 hujus.

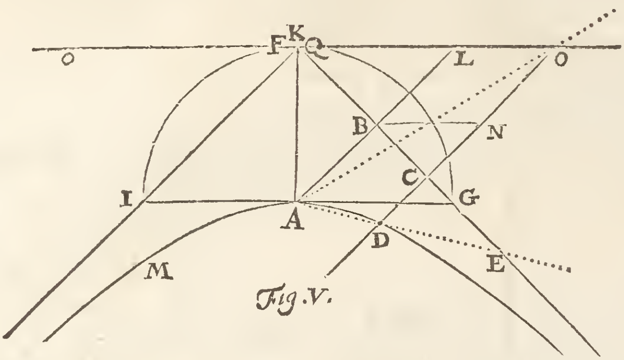


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [2] contingens, ut I G, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, si nempe *intervallum*, ut A L, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens I G ad angulos rectos occur- [2] per 6 hujus.

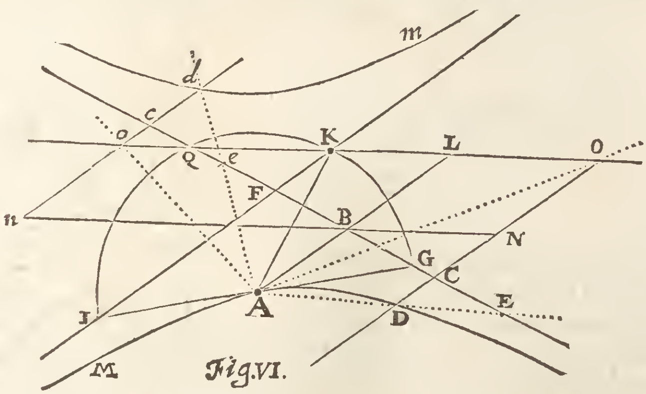


Fig. VI.

rit, ut in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asympto, cui eadem *efficiens* seu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque si vel Asymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

 metris

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola ſit deſcribenda, ductis in caſu poſteriore Aſymptotis F I, F G, diametro I G circulus deſcribatur, qui ſecet utramque Aſymptoton, puta

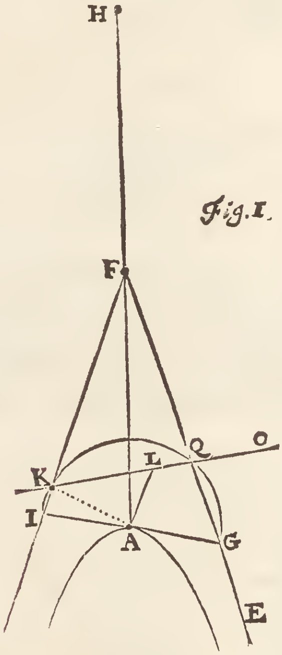


Fig. I.

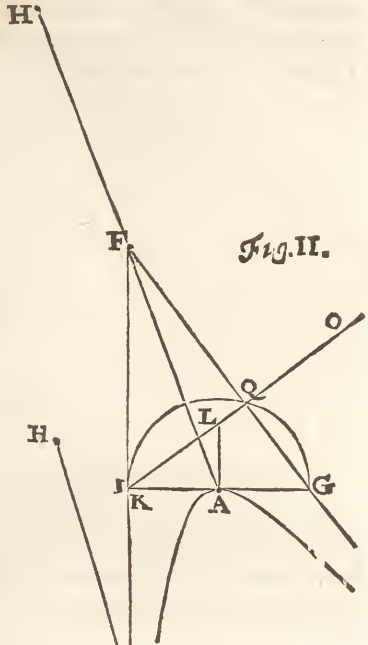


Fig. II.

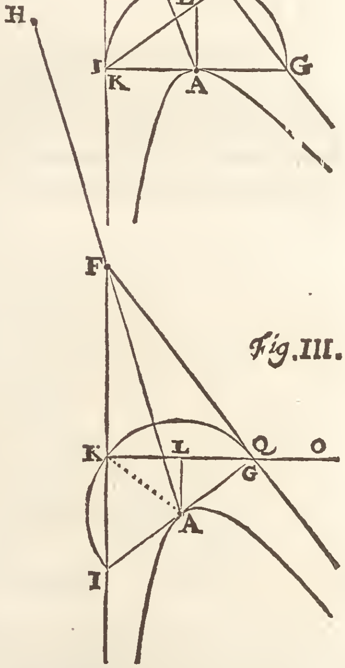


Fig. III.

in K & Q [a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Aſymptotorum alterutri, ut F I, æquidiſtans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmiſſis, ſi *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva deſcribatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram ſecet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

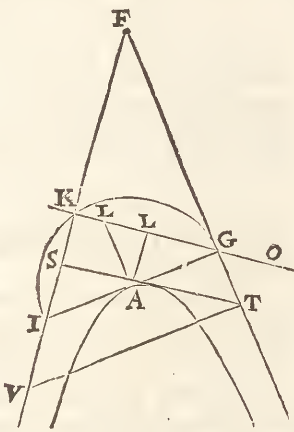
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occurſus evitemus, hæc eadem abſque Circuli deſcriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque ſi, ductâ A L Aſymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Aſymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis ſit, & per K recta K O ſecans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis ſit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O deſcripta, ea ipſa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum deſcriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc oſtendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *deſcribens* ad *directricem* ſit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo deſcribenda ſit in plano Hyperbola, cujus Aſymptoti ſint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Aſymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Aſymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere ſupponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita ſumtum ut IF inter V F & S F media ſit proportionalis) agatur æquidiſtans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæſitam [1], propterea quòd ſit V F ad I F, hoc eſt [2], I F ad S F, uti [3] T F ad G F. Ideoque deſcripto ſuper eandem I G circulo I K G, qui tangat Aſymptoton F T in G [4], atque alteram ſecet in K, ſi per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O ſit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, deſcribitur, juxta ea quæ modò expoſita ſunt, hæc ipſa, quæ delineanda proponitur.

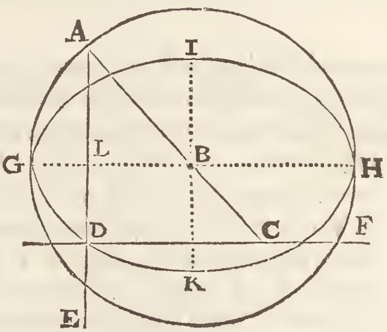


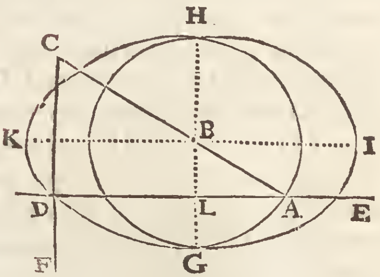
[1] *per 9 hujus.*
[2] *ex hypotheſi.*
[3] *per 2 ſexti, & componendo per 18 quinti.*
[4] *per Cor. 16 tertii.*

Similiter & vel datis quibuſlibet *angulis mobilibus*, vel ita ut *deſcribens* ad *directricem* datos quoſlibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm ſequentem quoque Ellipſin in plano deſcribendi rationem hîc adjeciſſe ſuum aliquando uſum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis ſui punctis A & C, in eadem utcunque aſſumptis (ſive B ſit inter A & C, ſive C ſit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, ac ſe invicem ad rectos angulos interſecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem interſectione, veluti D, deſcribitur, Ellipſin eſſe, cujus centrum eſt B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipſarum A B, B C duplæ, poſitione verò ipſis A D E, D C F, æquidiſtantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam diviſæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipſi *deſcribentes* A D E, D C F in ſtatione uti fuêre, cùm per illarum interſectionem deſcriptum eſt punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipſam G H, ſecat, ut in L. & ſit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A deſcribitur. Quoniam itaque eſt [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc eſt, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum ſive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

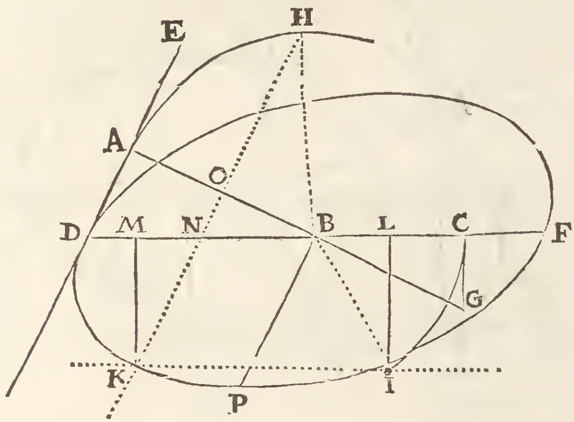
[1] *per 2 & 22 ſexti.*
[2] *per 14 ſecundi, vel 35 tertii.*

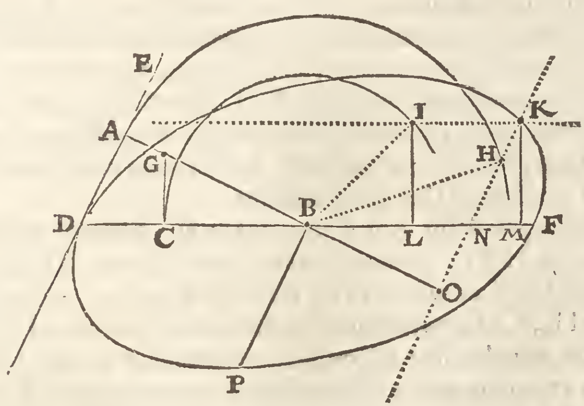
quadratum: constat [1], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K.

[1] per 13 hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

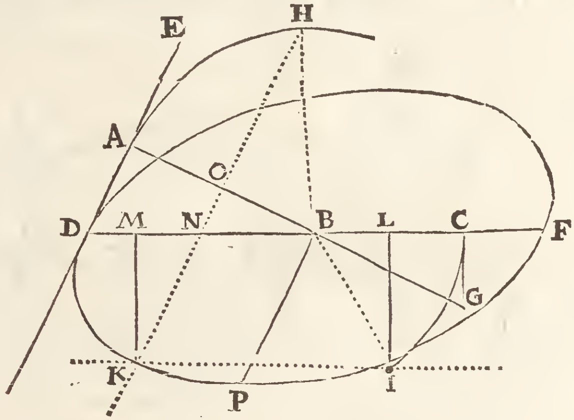
Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,





D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

cruri coincidat, (quemadmodum in ſtatione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus ſit perpendicularis, (ſicut in eadem ſtatione recta D A E ad crus A B perpendicularis eſt:) dico iterum, ſi angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque aſſumptis promoveat rectas D A E & D C F ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, cur-



vam, continuâ ipſarum interſectione, veluti D vel K, deſcriptam, Ellipſin eſſe, cujus ſemi-diametri magnitudine ſunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, ſi opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per aſſumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam poſitione; altera verò, ut B G, non item, ſed B P ipſi æqualis, rectæque D A E æquidiſtans.

Sit enim prædictus A B C angulus in alia ſtatione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata interſectio ad K. Demiſſis autem ab I & K ad rectam D F, ipſius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatiſque interſectionem punctis ad N & O, quoniam æquales ſive iidem ſunt angulus A B C ſive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2]

1 ex hypotheſi, & per 29 primi.
2 per 21 ſexti.

&

tuit[1],) *æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC sive [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hîc quàm ille cum angulo IGQ sive IGF[3] binos rectos constituit[e],) atque angulis LAG,. OAD vel OAE iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi OAG[f], compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quoque sunt, ac LO, AO sibi mutuò occurrant; GE quoque & AD sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO sive NB ad GE. At verò

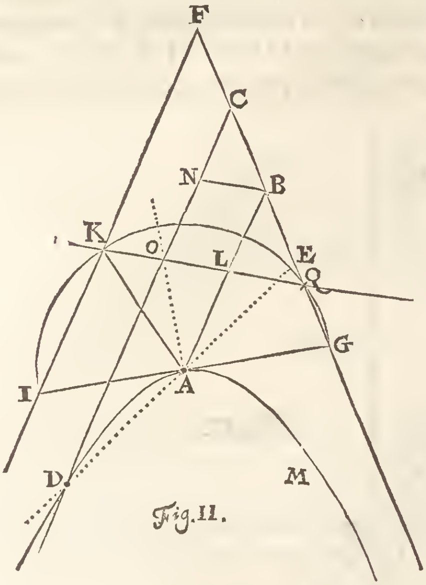


Fig. II.

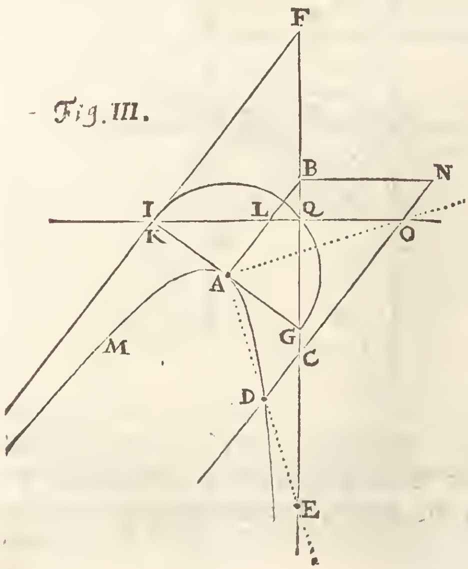


Fig. III.

1 *in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

d in casu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

2 *per 29 primi.*

3 *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.*

e in fig. II angulus AGE angulo ALO est æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

f vel, in casu fig. II & similibus, BAE.

4 *per 4 sexti permut.*

1 per sup. dem. (ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

2 per 4 sexti. 3 per 11 quinti. 4 per 9 quinti. 5 per sup. demonstr.

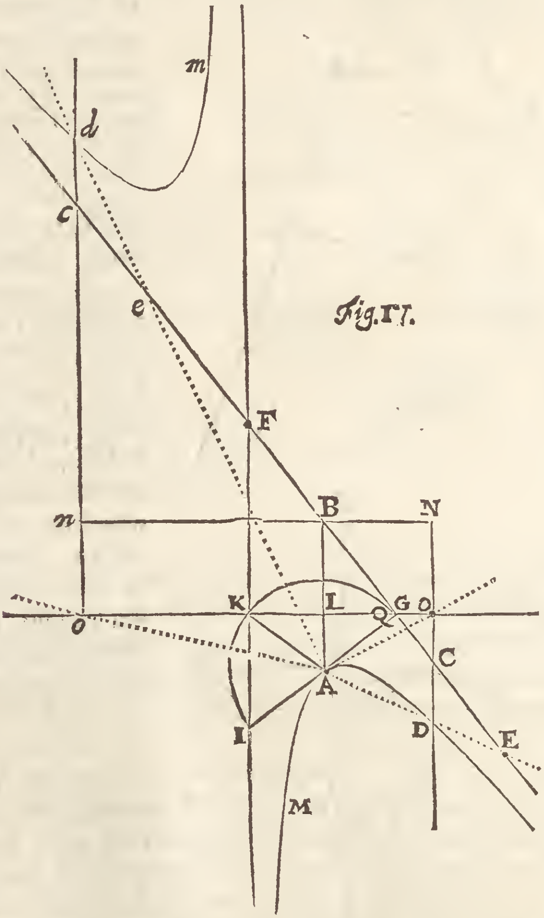


Fig. 11.

ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

6 per 29 primi. 7 per 4 sexti. 8 per sup. demonstr. 9 per 16 sexti.

ubicunque in curva aſſumptum fuerit D punctum, ſequitur [1] curvam D A M Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti F I, F G. Quod erat oſtendendum. [1] *per 3 hujus.*

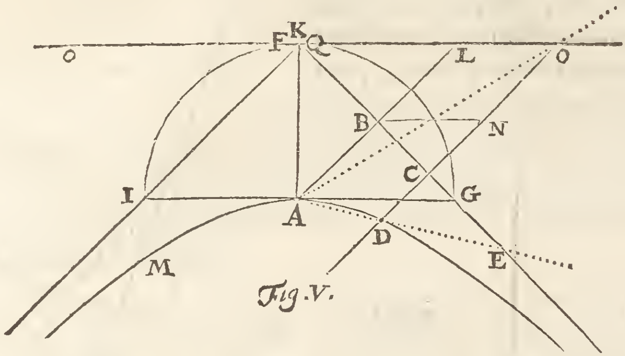


Fig. V.

Ex antedictis manifeſtum eſt, ſi *efficiens* ſeu [2] contingens, ut I G, ad Aſymptotorum alterutram perpendicularis ſit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, ſi nempe *intervallum*, ut A L, æquidiſtans ductum ſit ei Aſymptoto cui *efficiens* ſeu contingens I G ad angulos rectos occur- [2] *per 6 hujus.*

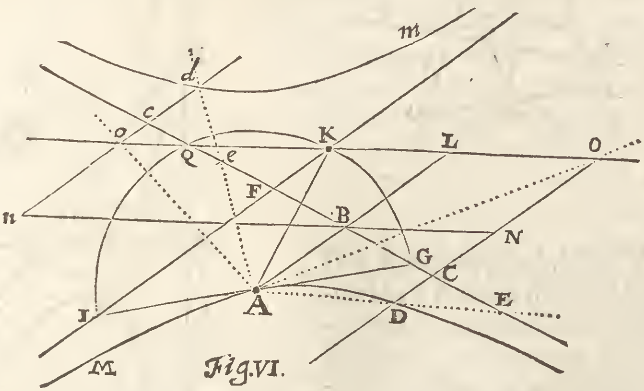


Fig. VI.

rit, ut in tertia figura, vel certè *deſcribentem* ad *directricem* fore perpendicularem, ſi nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Aſympto, cui eadem *efficiens* ſeu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque ſi vel Aſymptotis F I, F G, & contingente I G; vel diametris conjugatis H A, I G, Hyperbola sit describenda, ductis in casu posteriore Asymptotis F I, F G, diametro I G circulus describatur, qui secet utramque Asymptoton, puta

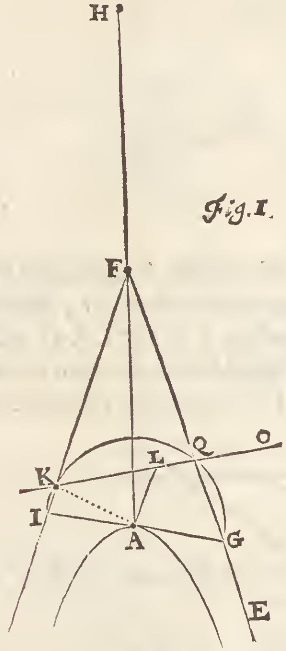


Fig. I.

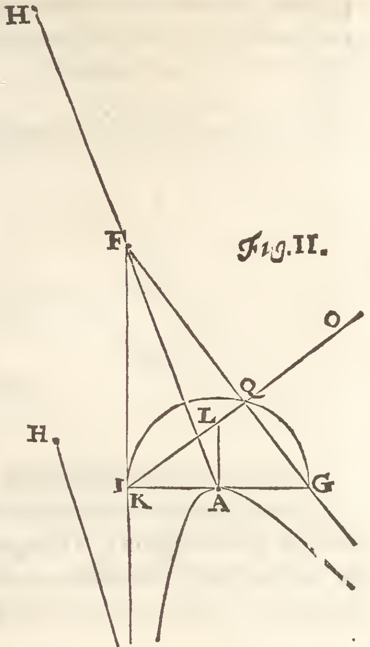


Fig. II.

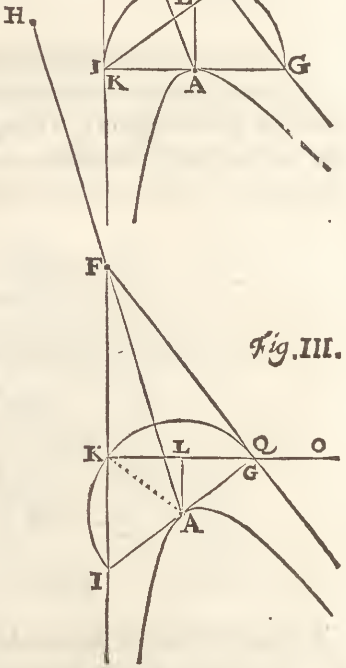


Fig. III.

in K & Q [a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Asymptotorum alterutri, ut F I, æquidistans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmissis, si *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva describatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram secet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

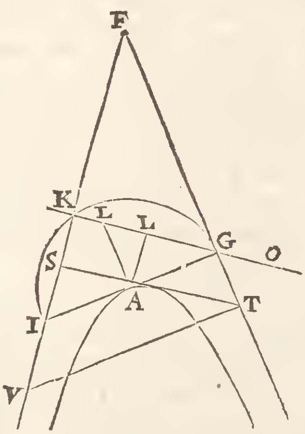
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occursus evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione efficere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumtum ut IF inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam[1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est[2], I F ad S F, uti[3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G[4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



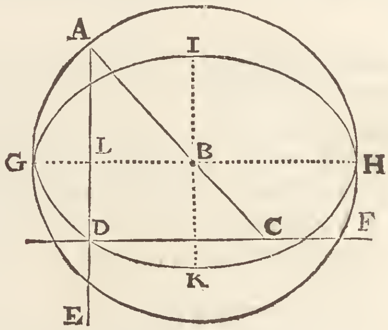
[1] *per 9 hujus.*
[2] *ex hypothesi.*
[3] *per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.*
[4] *per Cor. 16 tertii.*

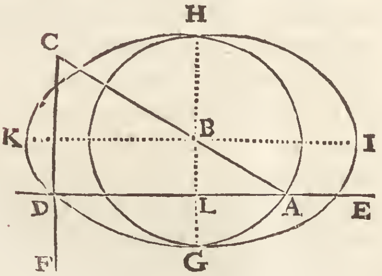
Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel ita

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipsarum A B, B C duplæ, positione verò ipsis A D E, D C F, æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





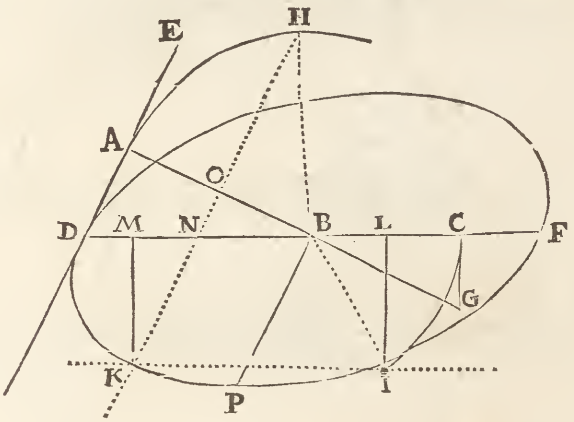
Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* A D E, D C F in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipsam G H, secat, ut in L. & sit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc est, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum sive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

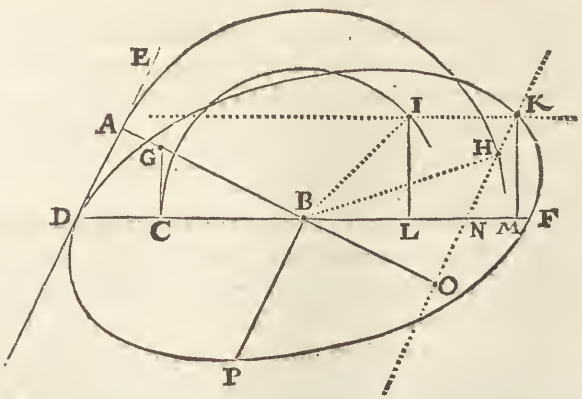
[1] *per 2 & 22 sexti.*
[2] *per 14 secundi, vel 35 tertii.*

quadratum: constat [1], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K. [1] *per 13 hujus.*

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,

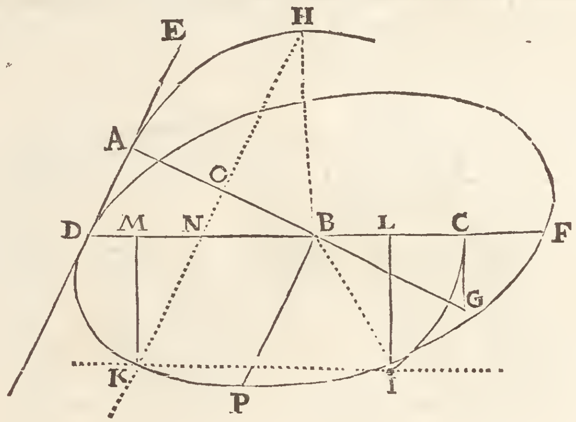




D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni

cruri

cruri coincidat, (quemadmodum in statione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta D A E ad crus A B perpendicularis est:) dico iterum, si angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas D A E & D C F sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, si opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam positione; altera verò, ut B G, non item, sed B P ipsi æqualis, rectæque D A E æquidistans.

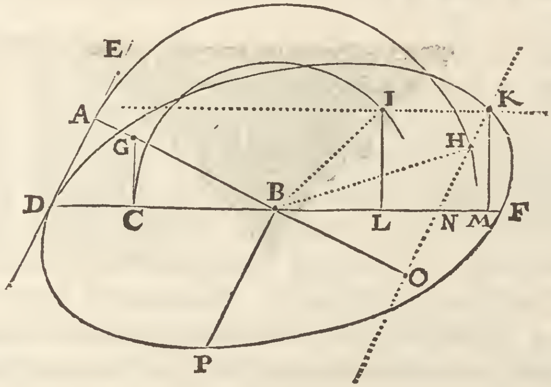
Sit enim prædictus A B C angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam D F, ipsius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatisque intersectionem punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus A B C sive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] ex hypothesi, & per 29 primi.
[2] per 21 sexti.

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N simile sit[1]: quare cum sit[2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratum, id est[3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit[4] per conversionem rationis D B quadratum ad D N F[5] rectangulum, sicut H B quadratum ad H O[6] quadratum, id est[7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum[8], id est[9], uti B G sive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando[10] D B quadratum ad

[1] *ob angulos ad* C, O, *&* M *rectos, ad* B *verò &* N *sive eosdem sive ad verticem.*

[2] *per* 4 *&* 22 *sexti.* [3] *ex hypothesi.* [4] *per Cor.* 19 *quinti.* [5] *per* 5 *secundi.* [6] *per* 47 *primi.* [7] *per* 4 *&* 22 *sexti.* [8] *æqualis est enim* B C *ipsi* B I, *&* I L *ipsi* K M. [9] *per* 4 *sexti, propter triangula* C B G *&* M K N *æquiangula.* [10] *per* 16 *quinti.*



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva D K P F, intersectione uti prædictum est descripta[11], cujus semi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipsin in vertice D[12].

[11] *per* 13 *hujus.*
[12] *per* 2 *Cor.* 13 *hujus.*

Notandum hîc est, quòd si rectus foret A B C angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes ſolummodo per ſimiles interſectiones in præcedentibus expoſuimus, per motum puncti in una eademque recta deſcribi poſſunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ ſunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propoſitas exiſtimamus, hiſce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumque* inventiones ac determinationes progredimur.

IOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CVRVARVM
LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.
PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæſtione, ubi indagandus proponitur Locus, ſive is ſit ad lineam rectam, ſive ad curvam, ſuppoſitis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel aſſumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, aſſumptum quodlibet quæſiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos erit reducta, ſi neutra incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſſurgat, hoc eſt, ſi neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſeu multiplicata reperiatur; quæſitus Locus erit linea recta: At ſi earundem incognitarum altera ad quadratum aſcendat, altera verò non item, ſed neque in ſe, neque in alteram incognitam ducta ſit, erit Locus quæſitus Parabola. Quòd ſi verò utraque ad quadratum aſcendat, ſive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non aſſurget, ſi de loco Plano Solidovè quæſtio ſit): erit Locus quæſitus vel Hyperbola, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto -\frac{bx}{a} + c$, ſive $y \propto -x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

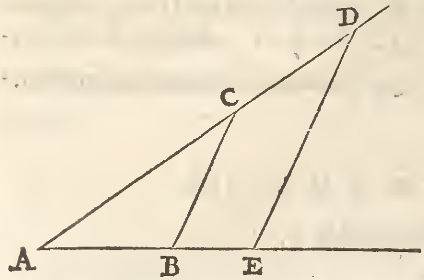
THEOREMA I.

Propoſitio I.

Si æquatio ſit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem A B puncto utcunque, veluti B, agatur B C in angulo

angulo A B C, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ est a cognitæ ad b cognitam.



hoc est, ut sit uti a ad b, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel assumpto æquali, si eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc est, ut a ad b, ita A E ad E D, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $a y \infty b x$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

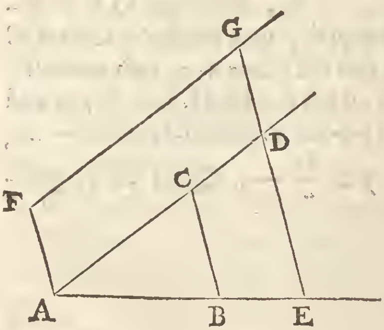
[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonstratio, ac proinde ipsa A C locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta A F ipsi B C parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG,

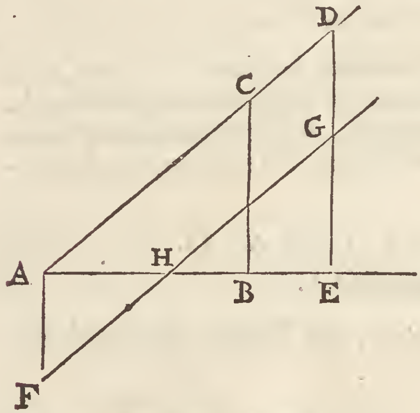
 dato

dato vel aſſumpto æquali, quæ ſecet rectam A C in D, ſi eadem
1 per 29 primi, & 4 ſexti. 2 per 16 ſexti. G E vocetur y, erit E D $\infty\ y - c$. At verò eſt, ut ſupra [1], uti A B ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac \infty\ bx$, vel $ay \infty\ bx + ac$, adeoque, factâ diviſione per a, $y \infty\ \frac{bx}{a} + c$. Quod demonſtrandum determinandumque erat.

THEOREMA III.

Propoſitio 3.

Si æquatio ſit $y \infty\ \frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæſitus linea recta.



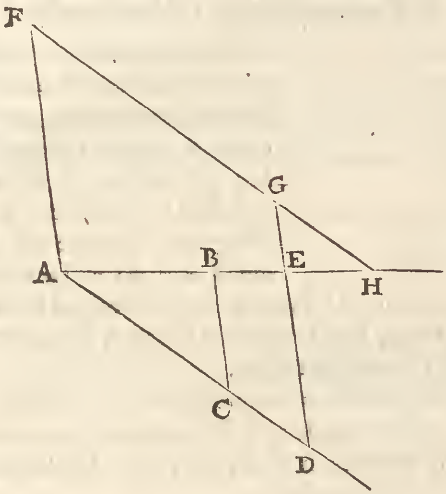
Poſitis factiſque ut in Theoremate 1^mo^, agatur inſuper ex A recta A F, ipſi B C parallela, atque ad oppoſitas cum ea partes, quæ ſit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipſi A C parallelâ, ſecante rectam A B in H, dico H G eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel aſſumpto æquali, quæ producta ſecet A C
3 per 29 primi, & 4 ſexti. 4 per 16 ſexti. in D, ſi eadem G E vocetur y, erit E D $\infty\ a + c$. Iam verò eſt [3] ex conſtructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc eſt, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac \infty\ bx$, vel $ay \infty\ bx - ac$, adeoque, factâ diviſione per a, $y \infty\ \frac{bx}{a} - c$. Quod eſt propoſitum.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio ſit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæſitus linea recta.



Poſitis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab oppoſita parte ipſius AB cadat, quodque angulus A B C æqualis ſit dati vel aſſumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta F G ipſi A C parallela, occurrens rectæ A B in H: dico F H eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in F H puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel aſſumpto æquali, quæ producta ſecet A C in D, ſi eadem G E vocetur y, erit E D $\propto c - y$. Cumque ſit [1] ex conſtructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc [1] *per* 13
eſt, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \propto bx$, vel *&* 29 *primi*, *&*
$ay \propto ac - bx$, id eſt, dividendo utrinque per a, $y \propto c - \frac{bx}{a}$. Quod 4 *ſexti.*
erat propoſitum. [2] *per* 16 *ſexti.*

At verò fieri etiam poteſt, ut per operationem, priuſquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evaneſcat, alteraque ſola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

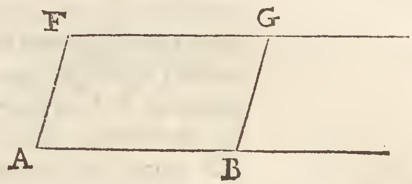
exinde binæ inſuper formulæ naſcuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \infty c$, vel
2. $x \infty c$.

THEOREMA V.

Propoſitio 5.

Si æquatio ſit $y \infty c$, Locus quæſitus eſt linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ A F ∞ c, faciente cum A B angulum, ipſi dato vel aſſumpto aut ejuſdem ad binos rectos ſupplemento æqualem, ſi ex F agatur F G ipſi A B parallela, dico eandem F G eſſe Locum quæſitum.

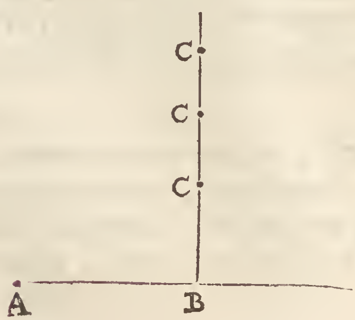
Etenim aſſumpto in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G B ipſi A F parallelâ, apparet eandem G B omneſque ipſi æquidiſtantes [1] rectæ A F fore æquales, hoc eſt, eſſe $y \infty c$. Quod erat demonſtrandum.

[1] per 34 primi.

THEOREMA VI.

Propoſitio 6.

Si æquatio ſit $x \infty c$, erit Locus quæſitus linea recta.



In linea A B, quæ, ut ſupra, pro x concepta ſit, ſumatur à puncto A longitudo A B æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel aſſumpto angulo ducatur recta B C. dico eandem B C, indefinitè productam, eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper A B, hoc est, $x \propto c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \propto ax \\ \text{II.} & yy \propto ax + bb \\ \text{III.} & yy \propto ax - bb \\ \text{IV.} & yy \propto -ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \propto xx \\ ay + bb \propto xx \\ ay - bb \propto xx \\ bb - ay \propto xx. \end{array}\right.$$

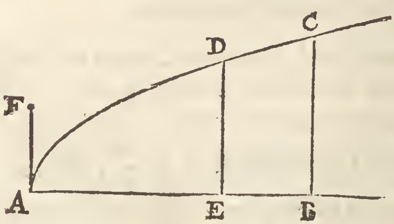
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \propto ax$, vel conversim $ay \propto xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo A B C; Assumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F

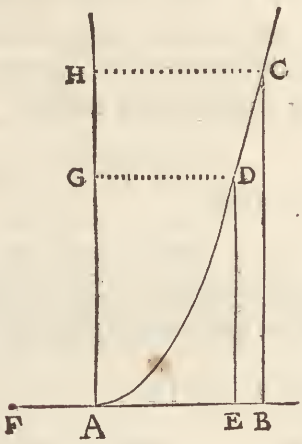


[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam A D C, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞ a, esse Locum quæsitum.

[2] per 1 primi hujus.

Sit enim in eadem curva A D C assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2] quadratum ex E D ∞ F A E rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta A H ipsi B C parallela, atque eadem A H assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B C seu A H C æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola A D C Locus quæsitus.

[3] per 1 primi hujus.

Est enim [3] quadratum ex G D sive A E quadratum æquale rectangulo sub F A & A G, seu F A & E D, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

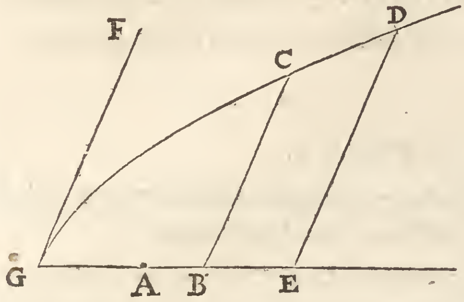
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo A B C. Deinde producatur A B versùs A usque ad G, ita ut sit A G ∞ $\frac{bb}{a}$; assumptâque G B pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum

rectum G F sit æquale a cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ

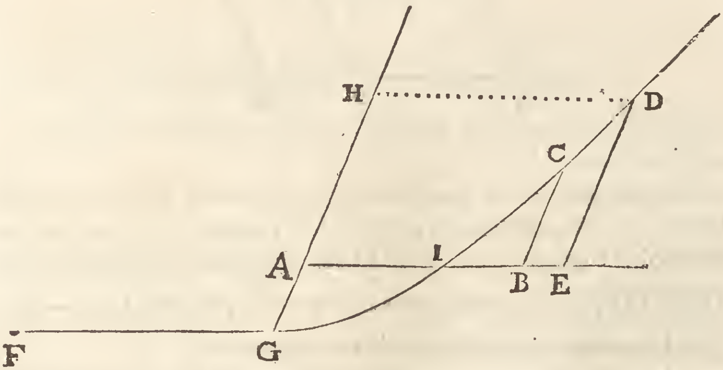


per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞ a, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, quoniam G E sive A E + A G est ∞ $x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo sub F G & G E, erit yy ∞ $ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] *per 1 primi hujus.*

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut A G sit ∞ $\frac{bb}{a}$, dico, si ad G H diametrum latere recto G F ∞ a Parabola describatur ut G C, quæ secet rectam A B in I, curvam I D esse Locum quæsitum.



Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H con-

[2] *per 1 primi hujus.*

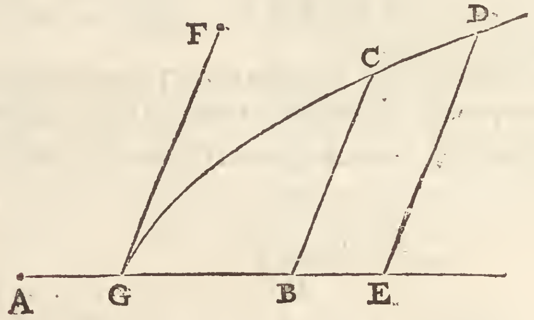
contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ac proinde, quoniam G H, sive D E + A G, $\infty\, y + \frac{bb}{a}$, atque F G $\infty\, a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \,\infty\, xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \,\infty\, ax - bb$ aut conversim $ay - bb \,\infty\, xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab A B recta A G $\infty\, \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam G C D esse Locum quæsitum.

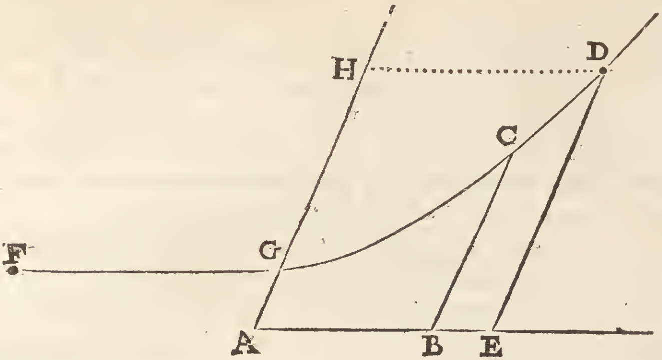


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D seu yy æquale rectangulo sub F G & G E, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per. 1 primi hujus.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela, atque ab ea subductâ A G $\infty\, \frac{bb}{a}$, sumatur G H pro diametro, &c. ut supra, dico curvam G C D fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ideoque, quoniam G H sive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb$ ∞ xx. Quod erat propositum.

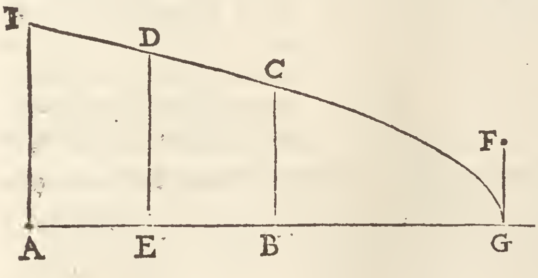
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit yy ∞ $bb - ax$ aut conversim $bb - ay$ ∞ xx, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

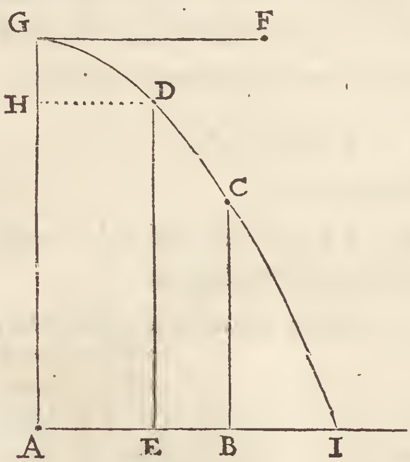
Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum,



intelligaturque eadem x in recta A B indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo A B C. Deinde ab A versùs B assumptâ A G ∞ $\frac{bb}{a}$, sumatur G A pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto ABC, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum GF eidem diametro correspondens sit ∞a, quæque Parabola rectam AI ipsi BC parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam GCI, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius DE sit æquale rectangulo sub FG & GE, & GE sive AG — AE sit $\infty \frac{bb}{a} - x$, ac FG ∞a, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] *per 1 primi hujus.*



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur AG ipsi BC parallela atque $\infty \frac{bb}{a}$, assumaturque GA pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta AE.

Cum enim ductâ DH ipsi AB parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH contentum sit æquale quadrato ex HD seu AE, sitque GH sive AG — ED $\infty \frac{bb}{a} - y$, atque FG ∞a, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty xx$. Quod erat propositum.

[2] *per eandem.*

Regula

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

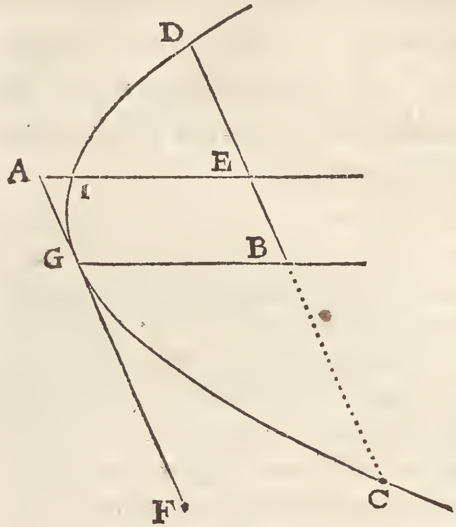
Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversa dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \infty bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \infty y + a$, erit $z - a \infty y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy: habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \infty bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \infty bx$. Vnde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\infty y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela,

ita

ita ut pars rectæ A F, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter A E & G B, veluti A G, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta G B assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente G F latere recto, ipsi diametro G B correspondente, $\propto b$ Parabola describatur, secans rectam A E in I: dico curvam I D indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



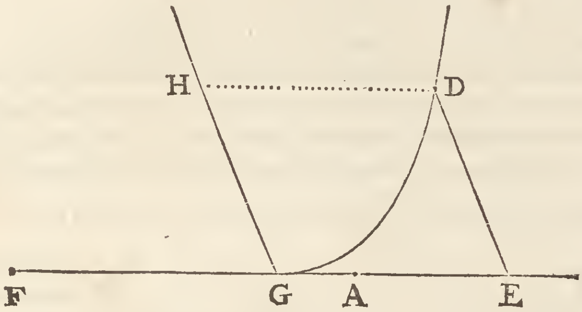
Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A F parallelâ, si eadem D E vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro G B occurrat in B: erit ex constructione intercepta E B $\propto a$, ac proinde tota D B $\propto y + a$, hoc est, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex D B æquetur rectangulo sub F G & G B, vel F G & A E: erit quoque $zz \propto bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \propto bx$, id est, $yy + 2ay \propto bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \propto bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \propto bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\propto y - a$, idcirco quoque diameter G B (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam A E cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \propto xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \propto x + a$, erit $v - a \propto x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc eſt, omiſſis iis, quæ ſe mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Vnde ſtatim apparet, reductam eſſe æquationem ad formulam prædicti Theorematis ſeptimi converſim, ac proinde Locum quæſitum eſſe Parabolam. Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A,

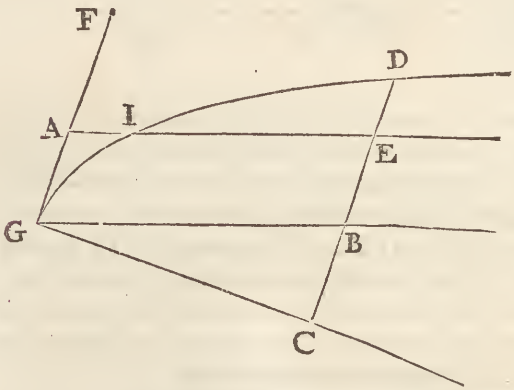


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere, ſitque datus vel aſſumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda eſt recta A E versùs A uſque ad G, ita ut A G ſit $\infty\ a$; & ex G ducenda eſt G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel aſſumpto angulo æqualem, ipſaque G H ſumenda eſt pro Parabolæ diametro, ad quam ſi per ejus verticem G atque latere recto F G $\infty\ b$ Parabola deſcribatur, ut G D: dico curvam G D eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D; ductâque D E ipſi H G parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, cum G E ſit $\infty\ x + a$ ſeu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum ∞ quadrato ex H D ſive G E, erit $by \infty vv$, ſive, reſtituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, ſeu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Quòd ſi æquatio fuiſſet $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis ſecundùm Regulam inſtituenda fuiſſet operatio, cecidiſſetque eo caſu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a} x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Vnde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm est infra eandem recta G B ipsi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum G B seu A E indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipsi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipsius G B inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a. Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C $\infty \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt $\infty \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra A E exsurgens, quæ possit esse y, postquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit $\infty\, y + c + \frac{bx}{a}$ seu z. Hujus igitur quadratum cum debeat esse $\infty\, dx$, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\infty\, dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b; sitque itidem notus angulus G B C, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B seu A E indefinitè sumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F $\infty \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] *per 6 sexti.*

Atque hîc, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam A E non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

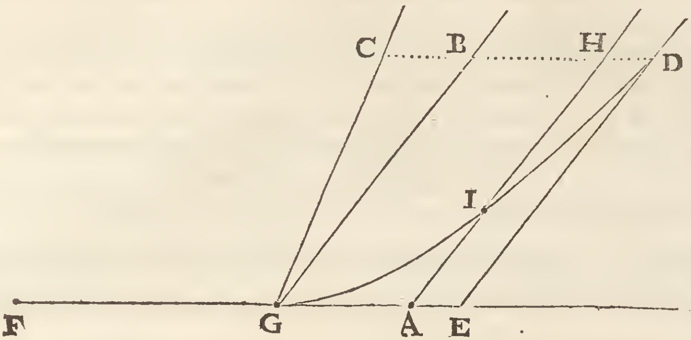
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, quæ protracta secet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, si D E vocetur y, cum E B seu A G sit $\infty\ c$, & B C $\infty\ \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\infty\ y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ G B non infra sed supra rectam A E, ut & G C non infra sed supra eandem G B ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Vnde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis VII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in ſequenti figura ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque da-



tus vel aſſumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex ſecunda parte Theorematis VII conſtat, prædictam Parabolam ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum ſint ipſi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propoſitam æquales eſſe quantitati aſſumptæ v, hoc eſt, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm eſt recta G B ipſi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipſi æquidiſtantium, velut A G vel H B ſit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ poſſit eſſe ipſi A E æquidiſtans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, ſecundùm ea, quæ in præcedentibus explicata ſunt, conſtituenda eſt Parabolæ diameter ab adverſa parte ipſius G B, quàm eſt punctum E in recta G C, ut, ſi G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipſi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipſi A E parallela, quæ poſſit eſſe x ad rectam G C producta, veluti D C, ſit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Cujus quidem quadratum cum æquale eſſe debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: ſtatim apparet, ſi Parabola deſcripta foret ad diametrum G C,

 cujus

cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent ∞ dy, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A H: erit quoque [1] ratio ipsius G B ad G C aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si G B sive E D indefinitè sumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta ∞ $\frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ G F ∞ $\frac{ad}{e}$, pro latere recto, si ad diametrum G C inventam, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[1] per 6 sexti.

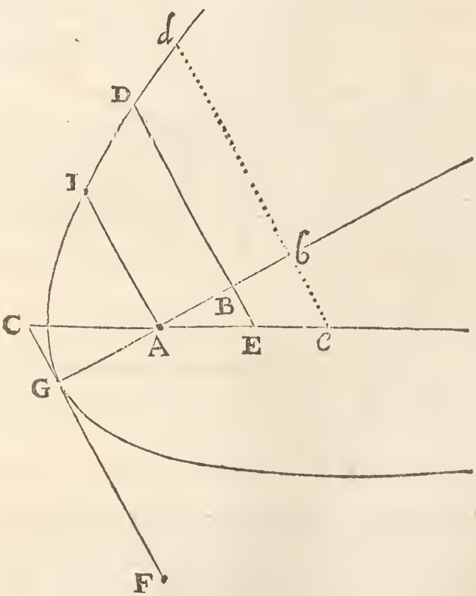
Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A H, ut & D C ipsi A E parallelâ, quæ quidem D C secet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E ∞ x ∞ D H; E D ∞ y ∞ G B; A G & H B ∞ c; B C ∞ $\frac{by}{a}$ ideoque tota D C ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C sit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \infty vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

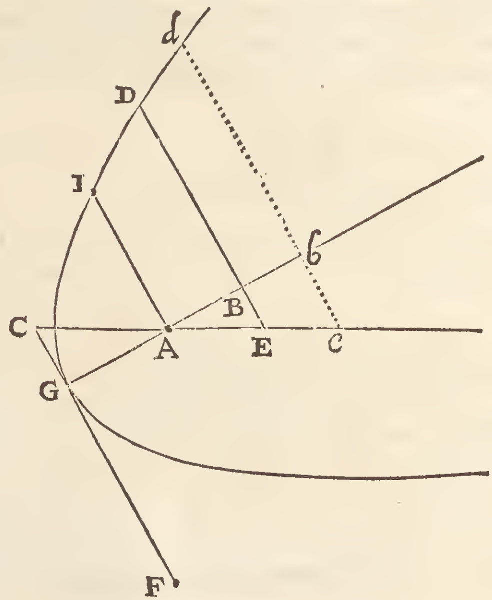
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Vnde apparet, eandem esse reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque est supra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem sit ratio A E ad E B, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita A E seu x ad E B, eritque E B $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, ejusque vertex punctum A, &, positâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

A B

A B versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum sub prædicto latere recto & parte G A contentum sit ∞ dd, rectam G B quæsitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc est per $\frac{2ab}{e}$, divisum æquari longitudini G A, ideoque G A fore ∞ $\frac{dde}{2ab}$. Quare si diametro G B & latere recto G F ∞ $\frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola describatur G D d, secans A I ipsi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæsitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: si nempe E A producatur ad C, ita ut A C sit ∞ $\frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipsi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concursus puncto vertex quæsitus.

Demonstratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, secante diametrum G B in B: erit, ex constructione, B E ∞ $\frac{bx}{2a}$; ideoque si E D vocetur y, erit D B ∞ $y - \frac{bx}{2a}$ seu z; F G ∞ $\frac{2ab}{e}$, G A ∞ $\frac{dde}{2ab}$; A B ∞ $\frac{ex}{2a}$, totaque G B ∞ $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum sit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipsius z in se ipsam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \infty dd + bx$. Vnde substituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z; obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty bx + dd$, id est, $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem pro casu hujus exempli converso Parabola describenda sit, ex comparatione ejusdem cum antedictis facile est colligere.

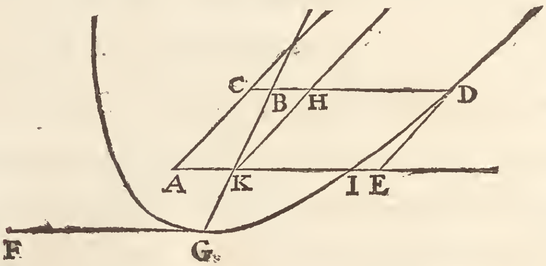
Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{2}cc \infty vv.$$

Vnde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
AK $\infty \frac{1}{2}c \infty$ CH, quia KH parallela AC.



Vt a ad b, ita KH seu y ad HB: unde HB fit $\infty \frac{by}{a}$, & DB $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.

Vt a ad e, ita KH seu y ad KB: unde KB (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\infty \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{e}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{cce}{2ab}$: unde KG fit ∞ $\frac{cce}{2ab}$, atque GB ∞ $\frac{cce}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB ∞ BD quadrato; ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc$.
$- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

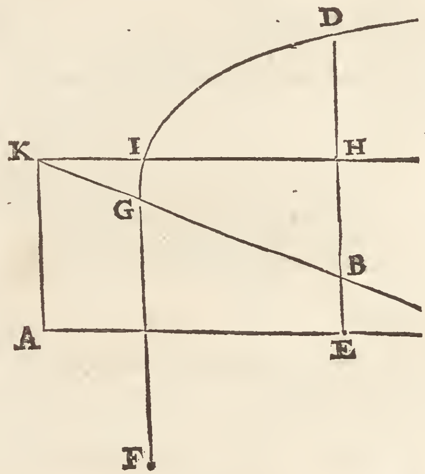
Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
AE indefinitè ∞ x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞ y.
EAK vel AED, angulus quem x & y comprehendere debent.

$AK \infty \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipſi AE.

Vt $2a$ ad b, ita KH ſeu x ad HB : unde HB erit $\infty \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e, ita KH ſeu x ad KB : unde KB (in quâ diameter) $\infty \frac{ex}{2a}$.

dx diviſum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod ſit FG, erit $\infty \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ diviſum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG fit $\infty \frac{3cce}{8ad}$, atque $GB \infty \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc ſi GB diametro & latere recto FG per verticem G deſcripta ſit Parabola, ſecans KH in I, erit ID Locus quæſitus.

Demonſtratio.

Eſto punctum D utcunque ſumptum in ID, & DE ducta parallela ipſi AK, quæ ſi vocetur y; erit $HD \infty y - \frac{1}{2}c$, ac $DB \infty y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc eſt, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$, hoc eſt, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, ſi utrinque demantur æquales, terminique ritè tranſponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propoſitum.

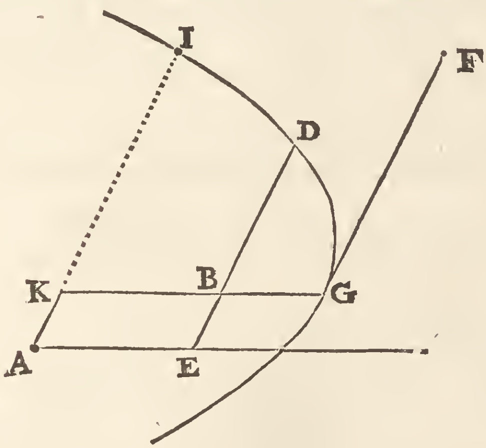
Atque hujus quidem exempli converſum, ut & cæteros caſus huc ſpectantes, ex iis, quæ jam dicta ſunt, ſimili modo reducere atque reſolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio ſit $ay - yy \infty bx$, ſive, quod idem eſt, $yy - ay + bx \infty o$, aſſumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo ſubſtituto in locum ipſius y, & ejuſdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem eſſe reductam ad caſum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem ſunt demonſtrata, Locum quæſitum eſſe Parabolam.

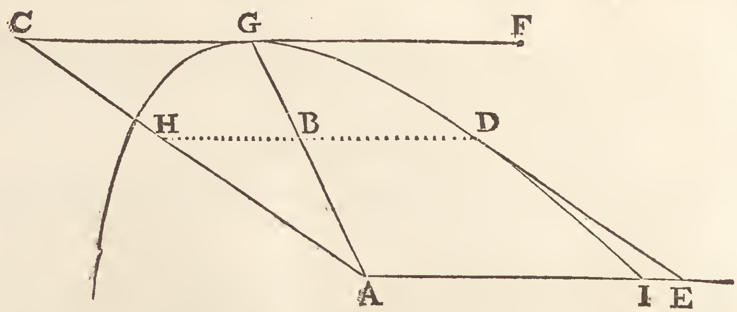
Ad cujus ſpecificam determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile punctum A, eademque x ſe indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; ſit autem datus vel aſſumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,



aut ipſius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z aſſumpta eſt $\infty y - \frac{1}{2}a$, ſi y ſupra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K G ipſi A E parallela, ita ut A K omnesque ipſi æquidiſtantes inter A E & K G interceptæ ſint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, ſi juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque ſumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K parallelæ, cujusque latus rectum F G ſit ∞b: erit ipſius portio deſcripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæſitus.

Etenim assumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet diametrum K G in B, si eadem D E vocetur y: erit D B ∞ $y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac G B sive G K — K B ∞ $\frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D sit æquale rectangulo F G B, erit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \infty 0$, sive etiam $ay - yy \infty bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty 0$: assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \infty vv$. Vnde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in A H recta A C $\infty \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipsi A E parallela, atque in eadem sumptâ C G, quæ se habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

A C, C G, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel aſſumpto aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento æqualem, cognita item ſit ratio, quam habet A C ad A G, quæ ſit ut a ad e; erit, A C exiſtente $\infty \frac{cc}{d}$, A G $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam ſi terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde ſi fiat G F $\infty \frac{ad}{e}$, erit G F latus rectum quæſitæ Parabolæ, diametro G A correſpondens; atque iccirco ſi ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola deſcribatur, ut G D I, ſecans A E in I: dico I D G curvam eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque D E ipſi A H, ac D B H ipſi A E parallelis, ſi eadem D E exprimatur per y, erit quoque A H ∞y. Cumque ſit ut A C ad C G, id eſt, ut a ad b, ita A H ad H B: erit H B $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum D H ſeu A E ſit ∞x, erit D B $\infty x - \frac{by}{a}$ ſeu v. Similiter cum ſit ut A C ad A G, hoc eſt, ut a ad e, ita A H ſeu y ad A B: erit A B $\infty \frac{ey}{a}$, & G A — A B ſeu G B $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum F G B ſit æquale quadrato ex B D, erit, factâ multiplicatione ipſius F G ſeu $\frac{ad}{e}$ in G B ſeu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipſius BD ſeu v in ſe ipſam, $cc - dy \infty vv$. Hoc eſt, reſtituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile eſt colligere, aliter etiam diametrum G A atque latus rectum G F indagari potuiſſe, hoc modo:

Cum A H indeterminatè ſit ∞y, juxta primum Theorema hujus ita ducatur A G, ut recta H B, quemadmodum & quælibet alia ipſi A E parallela, quæ inter A H & A G intercipitur, ſit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ eſt inter A H & A B ſimileſque, ut a ad e: ideoque cum A B indeterminatè ſit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis F G $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsita A G.

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

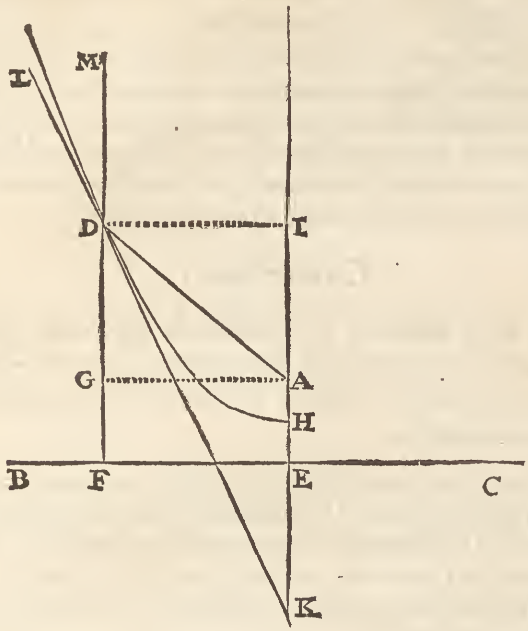
PROBLEMA I.

Propositio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea B C, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac posterior F D nominetur y; si ducta præterea intelligatur A G ipsi E F æquidistans, erit in triangulo rectangulo A G D basis A D ∞ y, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G seu recta E F ∞ x, & G D, sive (si punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (si punctum D inter F & G cadat) A E—F D ∞ $y = a$. Vnde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \infty xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa \infty xx$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta ea, quæ ibidem expoſita ſunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extenſa atque ipſi F D æquidiſtans; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id eſt, $\frac{1}{2}a$: erit deſcribendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque eſt, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ 2 a. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo expoſita ſunt, Parabolam ipſam deſcribere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice diſtat quartâ ipſius parametri parte, id ipſum ſit, quod vulgò Parabolæ Focus ſeu Vmbilicus nuncupatur, apparet ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Vmbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis eſt axis portioni per applicatam ab eodem puncto abſciſſæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Conſtat enim ex antedictis rectam A D, utcunque aſſumptum fuerit in curva punctum D, ſi per idem illud ad axem ordinatim applicata ſit D I, æqualem eſſe perpendiculari D F, hoc eſt, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abſciſſæ, & per verticem H, longitudine H E ∞ $\frac{1}{2}a$, id eſt, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifeſtum quoque eſt ex antedictis, ſi poſitis quæ ſupra, & productâ F D, uti ad M, per aſſumptum punctum D contingens ducta ſit, ut L D K, angulum F D K ſive M D L angulo A D K æqualem eſſe.

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipſi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc eſt, A D, ipſi A K æqualis; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc eſt, angulo F D K ſive M D L æqualis ſit neceſſe eſt.

[1] *per* 1 *Cor.* 2 *primi hujus.*
[2] *per* 5 *primi.*

CA-

CAPUT III.

Tertio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquationc reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

I. $yx \infty ff$.

II. $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$.

III. $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$.

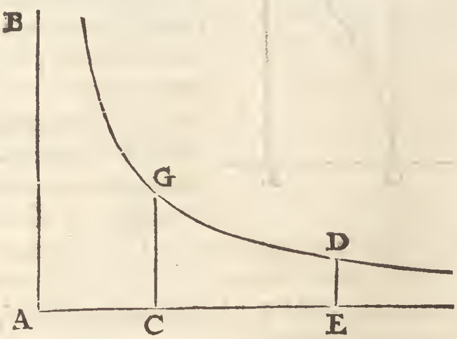
IV. $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$.

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \infty ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A B, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in A E recta A C ∞f, ducaturque C G eidem



æqualis ac ipsi A B parallela, descriptâque [1] per punctum G atque

[1] *per ea quæ in Corol. ad* 11 & 12, *nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.*

que Asymptotis A E, A B Hyperbolâ G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A B parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum A E D rectangulo A C G, hoc est, quadrato ex A C æquale. Hinc, cum A E sit assumpta pro incognita quantitate x, si E D vocetur y, erit $yx \infty ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

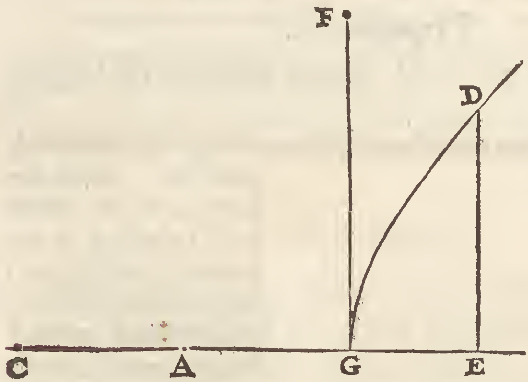
[1] per 3 primi hujus.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \infty xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F,



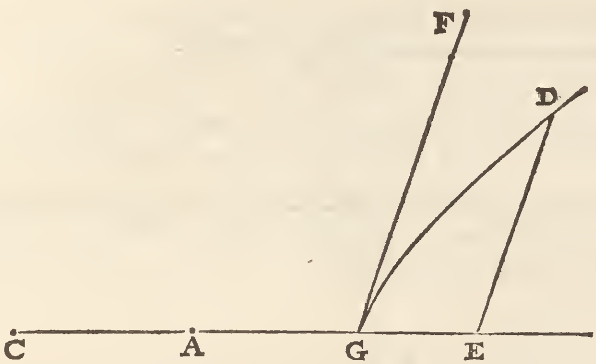
quòd si tam A G quàm A C fiant ∞f cognitæ, ac G F sumatur ∞ G C, centroque A, & transversâ diametro C G ipsi G F lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut G D, eandem curvam G D fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm C G & G F supponantur æquales, quadratum ex D E æquale rectangulo C E G.

[2] per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.
[3] per 10 primi hujus.

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit $\infty\ x+f$, & GE sive AE — AG $\infty\ x-f$, erit $yy\ \infty\ xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem modo quæsito erit satisfactum.

Est enim [1] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy\ \infty\ gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g}\ \infty\ xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[1] *per 10 primi hujus.*

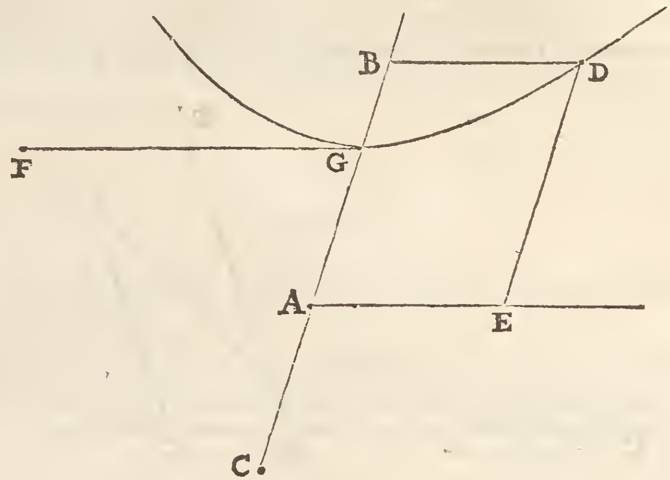
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff\ \infty\ \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x se ab A versùs

E in linea A E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, cum ſit ut l ad g, ita $yy - ff$



ad xx, ſtatim apparet, ſi tam A G quam A C ſumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F ſit ipſi A E parallela), ac poſtea centro A, tranſversâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola deſcribatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A G, ac D B ipſi A E parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, erit C B, hoc eſt, D E + A C, $\infty\, y + f$; & B G, ſive D E — A G, $\infty\, y - f$, ideoque C B G rectangulum $\infty\, yy - ff$. Dein cum [1] ex natura Hyperbolæ ſit ut C G ad G F, hoc eſt, ex hypotheſi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B ſive A E quadratum, id eſt, ita $yy - ff$ ad xx: erit $gyy - gff \infty lxx$, hoc eſt, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$: Quod demonſtrandum, determinandumque erat.

[1] *per 10 primi hujus.*

THEO-

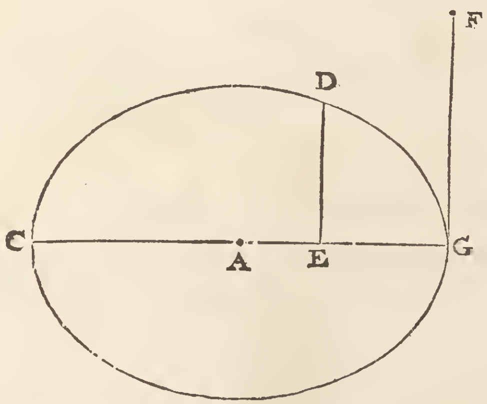
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio ſit $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$, erit Locus quæſitus Ellipſis.

At verò cum Ellipſeos ſpecies, quæ latera rectum & tranſverſum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, ſit Circuli circumferentia: palam fit caſu propoſito Locum quæſitum etiam Circuli peripheriam eſſe poſſe.

Hinc ad prædicti Loci determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe per lineam A E ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



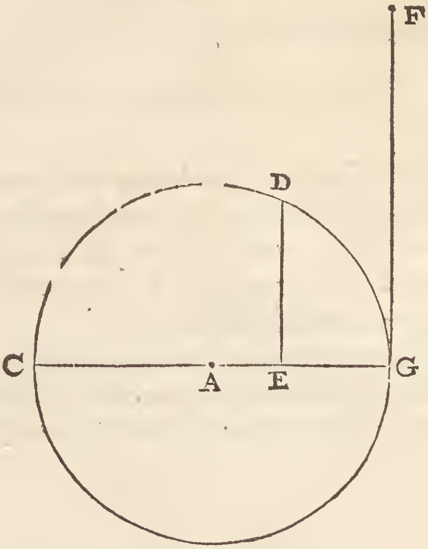
tur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum ſit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, ſi tam A G quàm A C ſumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita C G ad G F, ac centro A, tranſversâ diametro C G, & parametro G F [1] Ellipſis deſcribatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæſitum.

Sum-

[1] *per 7 Corol. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejuſdem lib. tradita ſunt.*

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi F G parallelâ, erit [1] ex natura Ellipſeos ut F G ad G C, ita E D quadratum ad C E G rectangulum. Hoc eſt, ſi E D vocetur y, cum C E ſit $\infty f + x$, & E G $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propoſitum.

[1] per 13 primi hujus.



Cæterùm liquidò conſtat, ſi C G & G F æquales fuerint, hoc eſt, ſi $l \infty g$, quòd etiam C E G rectangulum quadrato E D æquale ſit futurum. Ideoque ſi angulus C G F ſit rectus, curvam G D C fore Circuli circumferentiam.

Regula univerſalis, moduſque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione exiſtunt, cùm Locus vel Hyperbola eſt, vel Ellipſis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor caſuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

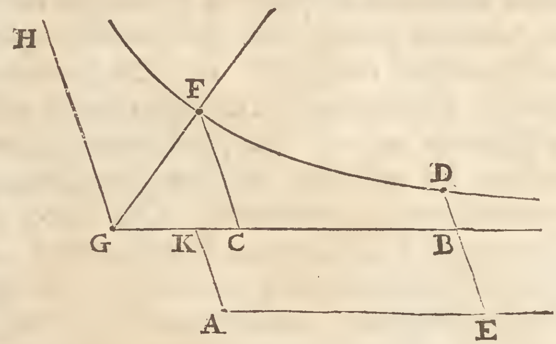
Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in ſe ducta, ſed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimenſionis in æquatione reperiatur, conſtituens planum cum alia, ſive cognitâ ſive incognitâ, tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + hy \propto ee$: aſſumpto $z \propto y - c$, & $v \propto x + h$, erit $z + c \propto y$, & $v - h \propto x$.

Vnde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + hz + hc \propto ee$, ſive $zx + hz + hc \propto ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - h$, erit $zv - hz + hz + hc \propto ee$, id eſt, $zv \propto ee - hc$. aut, (ſi loco termini $ee - hc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \propto ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\infty\, y - c$, si y supra lineam A E exsurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta K B ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipsi æquidistantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur c cognitæ. Porrò, quoniam v est $\infty\, x + h$, producenda est ipsa B K per K usque ad G, ita ut K G sit



$\infty\, h$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & G B una Asymptotωn, eritque altera ipsi A K parallela, ut G H. Vnde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta G B sumatur G C æqualis f cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Asymptotis G B & G H, sive Asymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola describatur F D: dico curvam F D fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet rectam K B in B, si eadem D E vocetur y, erit D B sive D E — E B $\infty\, y - c$, id est, z. Est autem & G B sive A E + G K $\infty\, x + h$, hoc est, v. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $z\,v \infty ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z, & $x + h$ in locum ipsius v, atque $ee - ch$ loco ff, erit $yx - cx + hy - ch \infty ee - ch$, hoc est, $yx - cx + hy \infty ee$. Quod erat propositum.

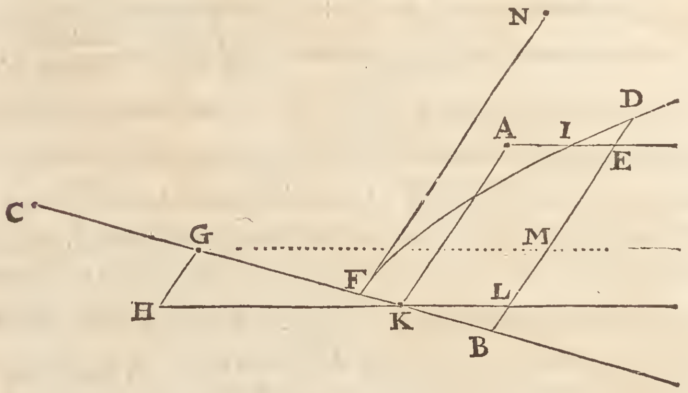
Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio ſit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$, aſſumpto $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$, eoque ſubſtituto in locum ipſius y, atque ejuſdem quadrato loco yy, ſublatiſque iis, quæ ſe invicem deſtruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ tranſpoſitione, $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per $fa + bb$; ut quantitas xx abſque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde aſſumpto $v \propto x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimenſionis reperitur, planè evaneſcat, habebitur $x \propto v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo ſubſtituto in locum ipſius x, atque ejuſdem quadrato loco xx, ablatiſque iis quæ ſe invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requiſitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa+bb}$ ſcribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + 2hx \frac{+aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum aſſumpto $v \propto x + h$ ſeu $x \propto v - h$, eoque ſubſtituto loco x in æquatione, ac ejuſdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \propto vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Vnde apparet, ante omnia hîc eſſe conſiderandum, utrum hh ſit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra. ſi enim majus ſit, erit caſus Theorematis XII; ſin contra, erit caſus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et conſtat exinde Locum quæſitum Hyperbolam eſſe.

Ad cujus peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E ab A verſus E indefinitè ſe extendere intelligatur; ſitque angulus quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipsius ad duos rectos supplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm est infra eandem A E recta K L ipsi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K usque ad H, ita ut K H sit ∞ h, ideoque H L indefinitè sumpta ∞ $x + h$, hoc est, v, ducatur per H punctum recta H G ipsi A K parallela, ita ut K H ad H G sit, ut a ad b. Quo facto, si per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B in-



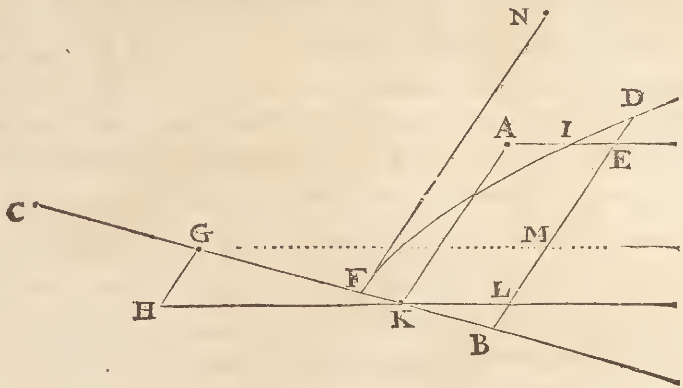
tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ est inter b & a: hoc est, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque sit ut K H ad H G. Ideoque cum K L sive A E indefinitè sumpta sit ∞ x, erit L B, ut & quælibet ipsi parallela, inter K L & K B intercepta, ∞ $\frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea supra A E rectam exsurgens, quæ possit esse y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B sive D E + E L + L B erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Vnde apparet, juxta Regulam lineam G B sumendam esse pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K seu D B parallelæ: eritque ejusdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Vnde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Est autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC ∞ $\frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF ∞ $\frac{iv}{a} -$

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

$\sqrt{\frac{iihh}{aa} \frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum CBF $\infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa+bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$,

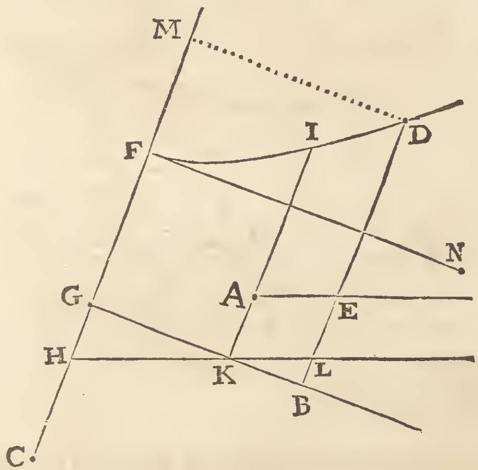


Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv - hh + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Dein restituto $x+h$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx+2hx+\frac{aadd+aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \infty xx + \frac{eaax+2bcax}{fa+bb} + \frac{aadd+aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa+bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \infty \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa+ccaa}{fa+bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iihh}{aa} + \frac{ddii+ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa+bb$, ac producto

divISO

diviſo per ii, factâque decenti tranſpoſitione, eadem cum ſequenti $zz - dd - cc + \frac{fahh + bbhh}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac diviſ. per ii, id eſt, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæſitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus ſpecificam determinationem & deſcriptionem, poſtquam ut in præcedenti figura ductæ ſunt lineæ A E, A K, K L, K H, H G, & G K B: erit quidem, ut ſupra, G centrum, at verò non erit diameter in linea G K, ſed, juxta Regulam, in linea H G producta

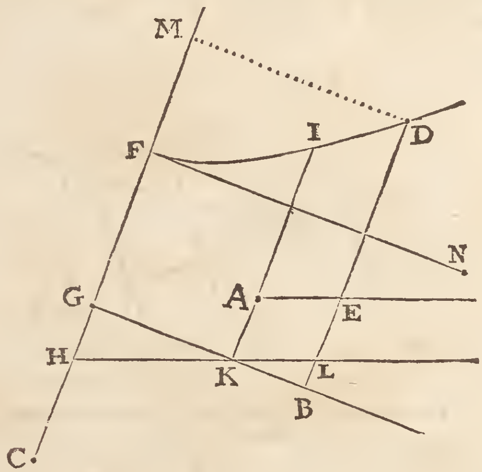


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi G K B parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium tranſverſæ diametri, nempe G F vel G C, æquale $\sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbhh}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare ſi fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita C F ad F N, quæ quidem F N ipſi G K B æquidiſtans ſit, erit F N parameter: ac proinde ſi centro G tranſversâ diametro C F & parametro F N Hyperbola deſcribatur F D, ſecans ipſam A E vel K A productam in I, erit I D curva Locus quæſitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D B ipſi A K (ſive G F), & D M ipſi G B parallelâ, ſi

E D

E D vocetur y, erit, ut ſupra, D B ſive M G $\infty\ z$, & B G ſive D M $\infty\ \frac{iv}{a}$. Cumque ſit G F vel G C $\infty \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbbb}{aa}}$, erit C M $\infty\ z + \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbbb}{aa}}$, & M F $\infty\ z - \sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbbb}{aa}}$, ac propterea rectangulum C M F ∞ $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbbb}{aa}$. Eſt autem D M quadratum $\infty\ \frac{iivv}{aa}$.



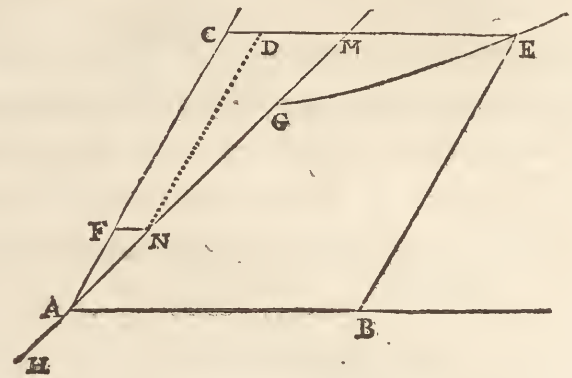
Quare cum ex natura Hyperboles ſit ut F N ad F C, ita D M quadratum ad C M F rectangulum, hoc eſt, ut ii ad $fa + bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbbb}{aa}$: erit quoque $zz - dd - cc \frac{+fahh + bbbb}{aa} \infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac diviſis per $fa + bb$, factâque tranſpoſitione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa + bb} \infty\ vv - hh \frac{+ddaa + ccaa}{fa + bb}$. Dein reſtitutis $x + h$ loco v, $\frac{eaa + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, atque $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipſius z, expunctisque quæ ſe invicem deſtruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod determinandum, demonſtrandumque erat.

Si

Si æquatio ſit $xx + 2ay \infty \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \infty 0$. Aſſumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$, eoque ſubſtituto in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, ſublatiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \infty 0$. &, factâ congruâ tranſpoſitione, $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc eſt, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviſo per bb, $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, aſſumpto $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \infty z + \frac{a^3}{bb}$, eoque ſubſtituto in æquatione loco ipſius y, atque ipſius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$, ſive $zz - \frac{a^6}{b^4} \infty \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæſitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè ſeſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc caſu & ſimilibus ita eſſe deſcribendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ ſint ipſi A B æquidiſtantes, ductâ rectâ A C ipſi B E parallelâ, quoniam $v \infty x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò eſt recta A M; ita ut omnium ipſi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipſius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ eſt inter b & a; hoc eſt, ut ſit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Vnde ſi A C ſeu B E indefinitè ſumpta vocetur y, erit C M & ſimiles $\infty \frac{by}{a}$, ac deſcribendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, ſi ab A C auferatur A F $\infty \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè ſumpta ∞z, &, ductâ F N ipſi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipſi F C æquidiſtantis & æqualis ad rectam D M aliarumque ſimilium ſit cognita, nempe ut a ad b, ſitque itidem notus angulus

N D M, ſub iiſdem comprehenſus, utpote æqualis dato vel aſſumpto angulo A B E, erit quoque ratio N D ad N M aliarumque ſimilium nota, quæ ſit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum N D ſeu F C indefinitè ſumpta exprimatur per z, erit N M itidem indefinitè ſumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum conſtituere debeat, multiplicanda eſt ſupraſcripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum fiat N G vel N H $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iiſdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole deſcribatur G E: dico curvam G E eſſe Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque E B in angulo A B E, dato vel aſſumpto æquali, nec non E C ipſi A B parallelâ, ſecante diametrum A M in M; ſi eadem E B, hoc eſt, A C, vocetur y, erit, ut ſupra, C M $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde M E, ſive A B—C M, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc eſt, v. Eſt autem, ut ſuperiùs annotatum, N M $\infty \frac{ez}{a}$, atque ex hypotheſi N G ſeu N H $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque H M $\infty \frac{ez}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & M G $\infty \frac{ez}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles ſit ut latus rectum ad tranſverſum, ſive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id eſt, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviſo, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein reſtituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipſius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviſo per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique reſtituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipſius v, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propoſitum.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

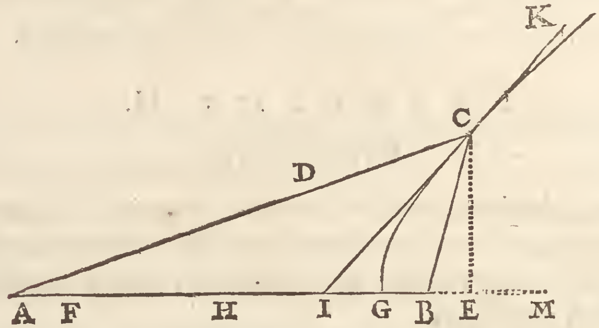
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG ſeu AD.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit, intelligatur demiſſa perpendicularis, ut CE; tum, ſuppoſitis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, aſſumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac poſterior, nempe EC, nominetur y, ipſa autem AB, ſeu datorum punctorum cognita diſtantia, vocetur a, & data FG ſive AD exprimatur per b. Hinc cum BE ſive (ſi punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (ſi punctum E inter A & B cadat) AB — AE ſit

$\infty\, x = a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$; sitque A C — A D ∞ B C: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$. Vnde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. I.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^{mi} hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\infty\, b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiamediametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4} bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$. Atqui cum FB ſive BH + HF ſit $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG ſive BH — HG $\infty \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\infty \frac{1}{4} aa - \frac{1}{4} bb$, nempe ∞ quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgo oppoſitarum Hyperbolarum Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium I.

Si ab aſſumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine tranſverſi axis ſuperabit.

Etiamſi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino conſtet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribuſvè, quòd ſciam, non niſi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonſtratum ſit: id ipſum hîc demonſtratione unicâ, & quidem breviore ſatisque ſimplici, aliter oſtendiſſe non inutile fortè judicabitur.

Eſto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, tranſverſus axis FG, atque Vmbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF ſemi-ſecundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab aſſumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Vnde cum ſit [2], ut

HFq ad GAF, ita FEG ad CEq: erit quoque, per compoſ. rationis contrariam, ut

HFq ad (HFq + GAF, id eſt [3], ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque [4] ut

HFq ad HAq, ita (HFq + FEG ſive [5]) HEq ad HAq + FEG + CEq. Eſt autem quoque [6], ut

HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca [7]

HM$q \infty$ HAq + FEG + CEq; hoc eſt, addito utrinque HFq ſeu HGq, erit

[1] *per 16 ſexti.*
[2] *ex hypoth. & per 10 primi hujus.*
[3] *per 6 ſecundi.*
[4] cum ſit ut una antecedentium ad unam conſeq., ita omnes antecedentes ad omnes conſeq. *per 12 quinti.*
[5] *per 6 ſecundi.*
[6] *ex conſtructione & per 22 ſexti.*
[7] *per 9 & 11 quinti.*

[1] per 6 secundi.

$$HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{seu} \\ HBq \end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})\, HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel ſublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

[2] per 4 secundi.

$$\text{nimirum} \left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{array}\right. \text{bis ab una, \&} \left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{array}\right. \text{bis ab altera parte: erit}^{2}$$

[3] per 47 primi. [4] per 7 secundi. [5] per 47 primi.

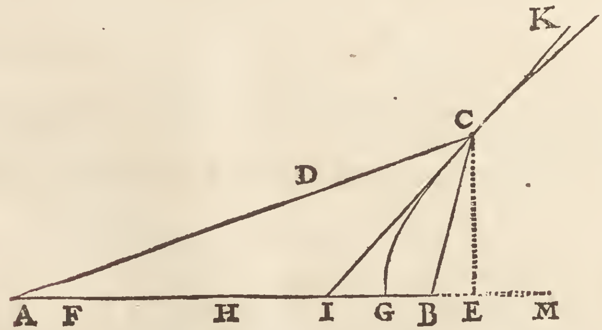
$FMq \infty (AEq + CEq$, id eſt [3]) ACq; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id eſt [5]) BCq. Cumque propterea FM ſit ∞ AC; & $GM \infty BC$; ſitque ipſarum FM & GM differentia FG, manifeſtum eſt ipſarum quoque AC & BC majorem ſuperare minorem, ejuſdem FG, nempe axis tranſverſi, longitudine. Quod demonſtrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, quæ angulum iis comprehenſum biſariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & converſim.

Si enim quæ angulum ACB biſariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, ſecet eandem, ſi fieri poteſt,

Fig. 1.

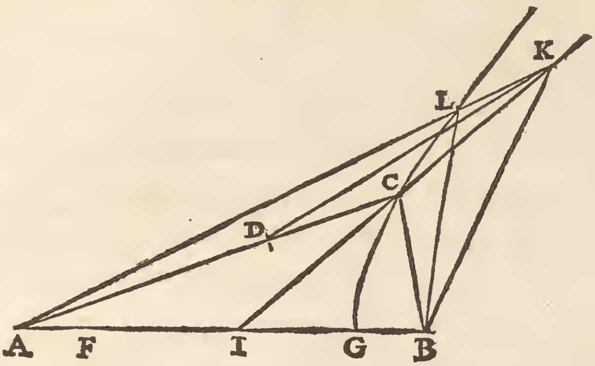


atque ita ſaltem aliquo ſui puncto, veluti K, intra Hyperbolam ſit.

Tum

Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

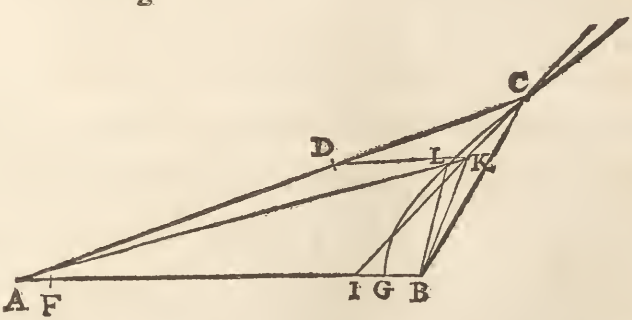
Fig. II.



circa [1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit [2], non secat Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia

[2] *per* 20 *primi.*

recta,

recta Hyperbolam contingere quàm I C K[1], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

[1] per 3 Corol. 6 primi hujus.

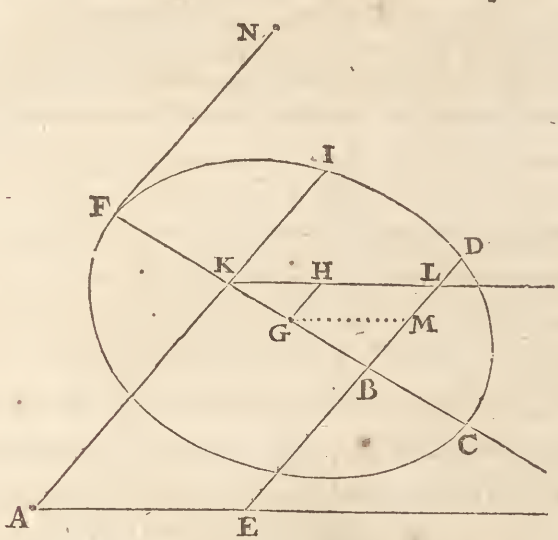
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \propto z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \propto - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \propto - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive $zz \propto \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \propto - xx \frac{+daax - 2bacx}{aa - bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Iam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa - bb} \propto - xx + 2hx + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \propto x - h$ sive $x \propto v + h$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa - bb} + vv - hh \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \propto - vv + hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejuſdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $z \propto y - c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam AE exſurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta KL eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,

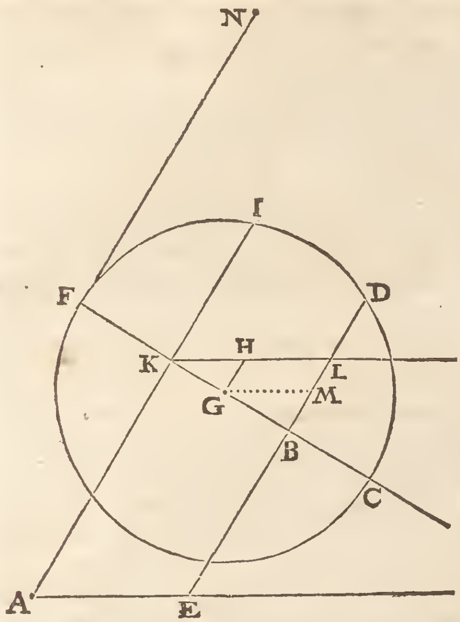


E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infrà rectam K L ducenda eſt recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ eſt inter b & a, hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita poſitâ K L ſive A E, indefinitè ſumptâ, $\propto x$, L B omneſque ipſi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis conſtat diametrum fore in recta K B, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K æquidiſtantes. Iam verò cum v ſit $\infty\ x - h$, à recta K L ſive A E auferenda eſt K H, ita ut eadem K H ſit $\infty\ h$, ideoque H L indefinitè quoque ſumpta $\infty\ x - h$ ſeu v. Deinde per punctum H ducenda eſt H G ipſi A K parallela, ſecans inventam diametrum in G, eritque idem interſectionis punctum G quæſitæ Ellipſeos centrum. Porrò quoniam ſimilium triangulorum K H G & K L B nota eſt ratio lateris K H ad H G ſive K L ad L B, ut & angulus ſub iiſdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel aſſumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G ſive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L ſive G M, quæ ipſi H L parallela intelligitur, indeterminatè ſumpta ſit $\infty\ v$, erit G B, ſimiliter indeterminatè ſumpta, hoc eſt, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\ \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum conſtituat, æquatio ſupra expoſito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, ſi ſinguli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim ſequenti modo ſe habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa}\ \infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc ſi juxta Regulam ſemi-latus tranſverſum G F vel G C fiat $\infty\ \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id eſt, $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iiſdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipſis deſcribatur F D C, ſecans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæſitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, ac ſi opùs ſit productâ ut ſecet rectas K L & K B in L & B, ſi eadem D E vocetur y, erit D B, hoc eſt, D E — E L + L B $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$ ſeu z. Eſt autem ut jam annotatum eſt G B $\infty\ \frac{ev}{a}$, atque ex conſtructione G F vel G C $\infty\ \frac{ef}{a}$, ideoque F B $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C $\infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipſis ſit ut N F ad F C, hoc eſt,

ut

ut $g\,aa$ ad lee, ita D B quadratum, hoc est, zz ad prædictum rectangulum F B C; erit $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$, ideoque restituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \propto hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc est, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò restituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \propto$



$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divisione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \propto cc + kk$.

Ac denique loco z factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto -xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hîc est, quòd si angulus A K B foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut D B, K I, &c. ad diametrum K B perpendiculares, ac simul F N æqualis F C, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

PROBLEMA III.

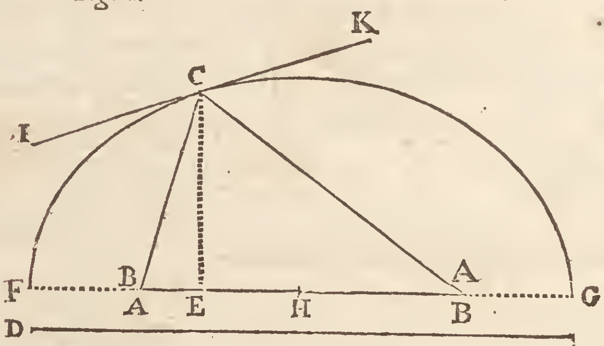
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demissa perpendicularis, ut C E. Tum suppositis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac posterior, nempe E C, nominetur y; ipsa autem A B seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E sive (si punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (si punctum B inter A & E cadat) A E — A B fit $\infty\ a - x$; atque A C $\infty \sqrt{xx+yy}$; & C B ∞ $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; sitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx+yy} \infty \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; factâque operatione ne decenti, ut utraque æquationis pars à ſigno radicali liberetur, & tranſpoſitis tranſponendis, erit

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$,

hoc eſt, factâ diviſione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb-aa}$. Aſſumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque ſubſtitutâ in locum ipſius x, ejuſdemque quadrato loco xx, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb-aa}$, ſive $\frac{bbyy}{bb-aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem caſus eſt Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæſitus Ellipſis. Cumque v aſſumpta ſit pro $x - \frac{1}{2}a$, ſi ab A versùs E ſumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & ſemi-diameter tranſverſa (velut H F ab una, & H G ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter tranſverſa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad eandem perpendicularem, tranſverſus quoque axis eſt,) ſit ∞b. Ratio autem tranſverſæ diametri ad parametrum, ſeu quadrati tranſverſæ ad quadratum ſecundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi expoſita ſunt, quæſita Ellipſis facillimè deſcribetur. Porrò cum quadratum ſemi-diametri tranſverſæ ſit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum ſemi-ſecundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum F B ſeu G A ſit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & B G ſeu A F $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum F B G ſeu G A F $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato ſemi-ſecundæ diametri, ſive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad tranſverſum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipſa ſunt, quæ vulgò Ellipſeos Foci ſive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmiſſis rectè inferri, quæ ſequuntur.

Corollarium 1.

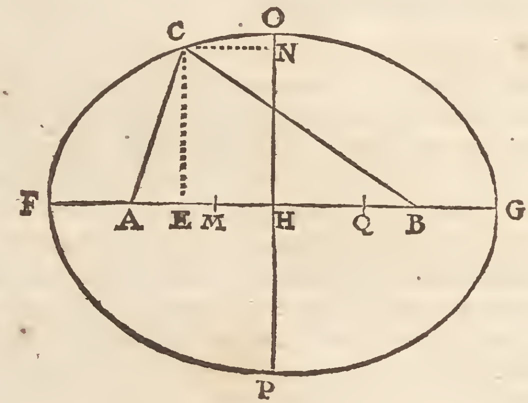
Quæ à quolibet in Ellipſi puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducuntur, ſimul ſumptæ tranſverſo axi æquales ſunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola ſuperiùs demonſtratum eſt, ductarum C A, C B differentiam tranſverſo axi F G æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem tranſverſo axi æquale eſſe oſtendetur, nempe, ſi non per additionem & compoſitionem,

 ut

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis F C G, cujus centrum H, axis major F G, minor O P, atque Vmbilici A & B; adeoque rectangulum F B G ut & G A F æquale quadrato semi-secundæ diametri H O.



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis C A, C B, ordinatim ad utrumque axem applicentur C E, C N; & fiat ut H F ad H A, ita H E ad H M, adeò ut [1] A H E rectangulo æquale sit rectangulum F H M; sumaturque H Q æqualis ipsi H E. Hinc cum sit [2] ut H F q ad H A q, ita H E q ad H M q, erit quoque per conversionem rationis ut H F q ad G A F seu [3] H O q, id est [4], ut C N q sive H E q ad O N P, ita idem H E q ad E M Q; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula O N P & E M Q. Quocirca cum [6] H M q unà cum E M Q, id est, cum O N P rectangulo, æquale sit H E q; sitque & H F q [7] æquale quadratis rectarum H A & (H O [8] seu [9]) C E unà cum rectangulo O N P: erunt H M q + O N P + H F q æqualia H E q + H A q + C E q + O N P. Ac proinde si utrinque auferatur O N P rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum H M & H F seu H G simul æqualia tribus quadratis rectarum H E, H A seu H B, & C E. Hinc

[1] *per 16 sexti.*
[2] *per 22 sexti.*
[3] *ex hypothesi.*
[4] *per 13 primi hujus ejusque Corol. 1*
[5] *per 9 quinti.*
[6] *per 5 secundi.*
[7] *per 5 secundi.*
[8] quippe quadr. ex H O æquale est G A F rectang. ex hypoth.
[9] *per 5 secundi.*

Hinc additis ablatisvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum F H M seu G H M bis ab una,& A H E seu B H E bis ab altera parte: erit [1] F M q æquale (A E q + C E q, id est [2],) A C q: itemque [3] G M q æquale (B E q + C E q, id est [4],) B C q. Cumque propterea recta F M æquetur ipsi A C, & G M ipsi B C: erit ipsarum A C & B C aggregatum transverso axi F G æquale. Quod demonstrandum erat.

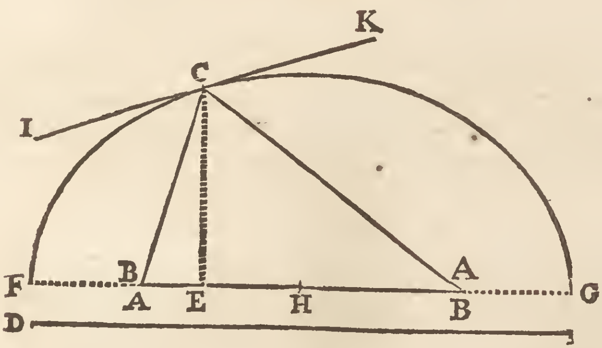
[1] per 7 secundi.
[2] per 47 primi.
[3] per 4 secundi.
[4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta I C K ita ducta, ut æquales sint anguli A C I, B C K, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ A C ad L, ita ut tota A L

Fig. 1.



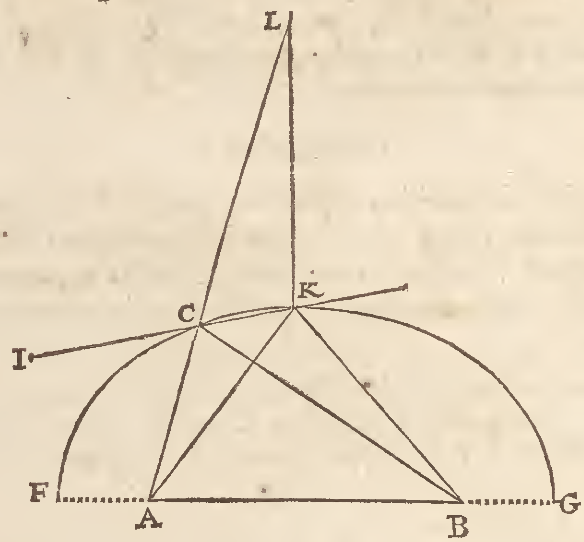
axi F G, ideoque [5] adjecta C L ipsi C B æqualis sit, jungantur A K, B K, L K. Cum igitur, in triangulis L C K, B C K latera L C, C K lateribus B C, C K, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis L K basi B K æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt,

[5] per Corol. 1 hujus.

per

per Corollarium præcedens, rectæ A K, K B, hoc eſt, latera A K, K L ſimul ſumpta tranſverſo axi F G, ideoque & baſi A L

Fig 11.



æqualia, quod eſt abſurdum [1]. Non igitur ſecat recta I C K Ellipſin, ſed eandem contingit in C puncto. Cumque non poſſit in eodem puncto C alia recta Ellipſin contingere quàm I C K [2], manifeſtum eſt, è contra quoque eam, quæ Ellipſin in C contingit, efficere angulos A C I, B C K æquales.

[1] *per* 20 *primi.*
[2] *per* 17 *primi huius.*

CAPVT IV.

Regula univerſalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & ſolida.

Iam verò his omnibus ita præmiſſis, pro generali Regula concludi poteſt, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere poſſunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in ſe ducta, neque factum ſub iiſdem ad ſolidum

lidum excurrat, ſed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua ſequentium formularum conſtare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci poſſe: nimirum,

$$1^{mò}.\begin{cases} y \propto \frac{bx}{a}, \text{ ſive, quod idem eſt, } y \propto x: \text{ cum ſupponi} \\ \quad\quad \text{poſſit eſſe } a \propto b. \\ y \propto \frac{bx}{a} \pm c, \text{ vel } y \propto c - \frac{bx}{a}. \end{cases}$$

Signum $\pm$ ſignificat $+$ vel $-$.

Sed hîc notandum, fieri etiam poſſe, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evaneſcat, alteraque ſola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, ſicut ſuperiùs expoſitum eſt.

$$2^{dò}.\begin{cases} yy \propto dx, \text{ aut converſim } dy \propto xx. \\ yy \propto dx.ff, \text{ aut converſim } dy.ff \propto xx. \\ zz \propto dx, \text{ aut converſim } dy \propto vv. \\ zz \propto dx.ff, \text{ aut converſim } dy.ff \propto vv. \end{cases}$$

$$3^{tiò}.\begin{cases} yy \propto \frac{lxx}{g}.ff. \\ zz \propto \frac{lxx}{g}.ff. \\ yy \propto \frac{lvv}{g}.ff. \\ zz \propto \frac{lvv}{g}.ff. \end{cases} \quad \text{ſive etiam} \quad \begin{matrix} yx \propto ff. \\ zx \propto ff. \\ yv \propto ff. \\ zv \propto ff. \end{matrix}$$

Supponendo ubique y & x eſſe quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z eſſe quantitatem aſſumptam, & quæ compoſita ſit ex $y \pm$ aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta ſit; atque v quidem aſſumptam quoque eſſe, ſed eo caſu conſtare ſolummodo ex $x \pm$ aliâ quantitate cognitâ, abſque ulla ipſius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v eſſe $\propto x \pm$ aliâ quâdam quantitate,

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

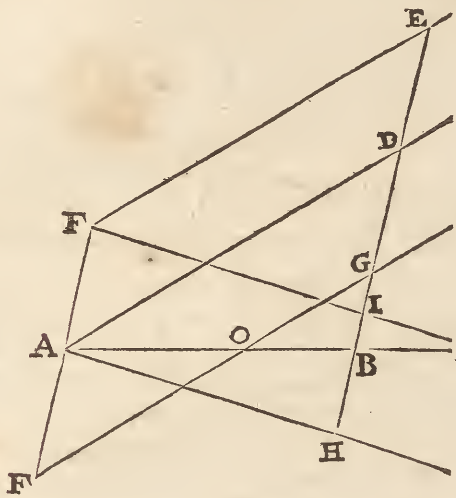
Vt autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulus A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

Sed si æquatio sit $y \infty c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea H B E sumendum est ab altera parte lineæ A B, quâ datus vel assumptus angulus A B E existit, punctum H, ita ut A B ad B H sit, sicut a ad b; ductâque A H, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ A B, quâ sum-

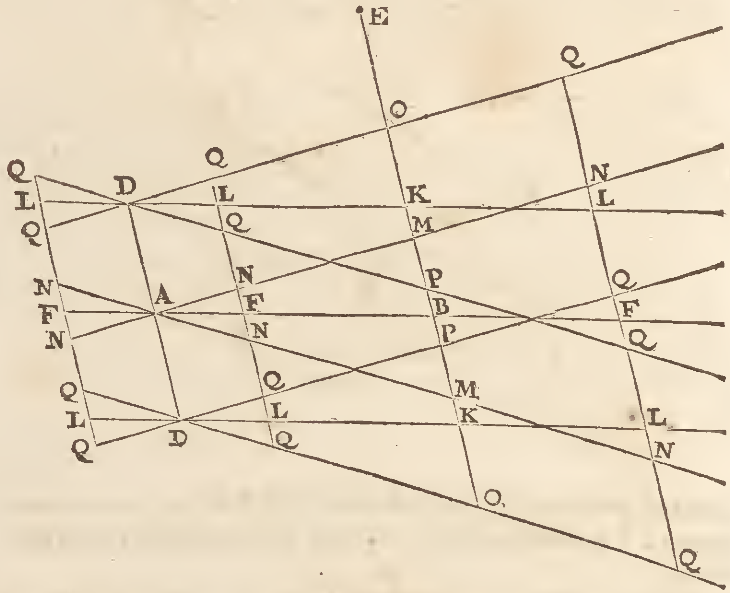


ptum est punctum H, ducenda est F I ipsi A H parallela: eritque eadem F I producta donec cum linea A B coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam A B quàm B D sit $\infty\ x$, aut A B ad B D ab una, ut & A B ad B H ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde B D vel B H $\infty \frac{bx}{a}$: itemque, cum A F seu D E vel D G ut & H I sint æquales c cognitæ: erit B E sive B D + D E $\infty \frac{bx}{a} + c$, & B G sive B D — D G $\infty \frac{bx}{a} - c$, ac B I sive H I — H B $\infty\ c - \frac{bx}{a}$. Vnde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea A B, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas A D, F E, F G, & F I esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò ſi juxta formulas ſub N°. 2 exhibitas Locus quæſitus ſit linea Parabolica, erit

I. Primo caſu, quando æquatio eſt $yy \infty dx$, ipſa A B Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales, atque ejuſdem vertex A punctum.



II. Secundo caſu poſitâ æquatione $yy \infty dx.ff$, manente diametro in eadem linea A B, ſumptâque, ut in ſequenti figura, A F $\infty \frac{ff}{d}$, erit ejuſdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, ſi uterque terminus tam dx quàm ff ſigno + ſit affectus, ab altera parte puncti A, quâ eſt punctum B, ſumendum eſt; ſed ſi vel terminus dx, vel terminus ff ſigno — affectus ſit, ab eadem parte puncti A, quâ eſt punctum B, ſumi debet: & quidem ſi terminus dx ſigno + affectus ſit, ab A versùs B Parabola deſcribenda eſt; ſin contra terminus dx ſigno — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, deſcribi debet.

At

At si æquatio sit $zz \infty dx$, vel $zz \infty dxff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \pm c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela atque ∞c; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ A B, quam conceptus est angulus A B E: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ A B cadat. Deinde ductâ D K ipsi A B parallelâ, erit in eadem D K Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \infty dx$.

IV. Sed si sit $zz \infty dx . ff$, qui sit quartus casus, sumptâ D L $\infty \frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel — affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel — adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter ∞d.

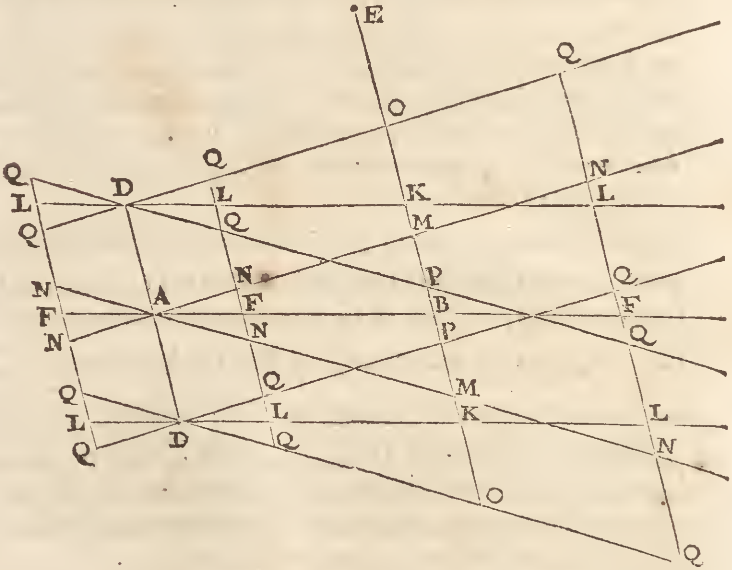
V. Si verò z assumpta sit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea B E puncto M, ita ut sit A B ad B M, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ A B, quâ conceptus est angulus A B E, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta A M: eritque A M eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo A M E æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis L F L, quæ intersecent supra dictas diametros A M vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo — affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ꝏ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B sumi debet) ducenda est recta D O ipsi

VII. A M, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta D P parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut A B ad A M, hoc est, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\propto d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & recta A B contentum sit $\propto$ B E quadrato: erit $dx \propto yy$. [1] per 1 primi hujus.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \propto dx \pm ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \propto dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundum Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \propto$ rectæ A B; erit similiter recta A F major quàm A B: ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam A F est $\propto \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, A B $\pm$ A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$,

atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ B E
2. sive yy, ac proinde $yy \infty dx \pm ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in recta D K, quoniam A D seu B K est $\infty\, c$: erit K E, hoc est, $BE - BK \infty y - c$; & K B E, hoc est, $BE + BK \infty y + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y \pm c$, erit K E & K B E $\infty\, z$. Est autem D K seu A B $\infty\, x$, parameterque $\infty\, d$, & rectangulum sub dicta Parametro & recta D K contentum ∞ quadrato ex K E vel K B E. Quare cum hoc quadratum sit $\infty\, zz$, atque
3. rectangulum illud $\infty\, dx$, erit $zz \infty dx$.

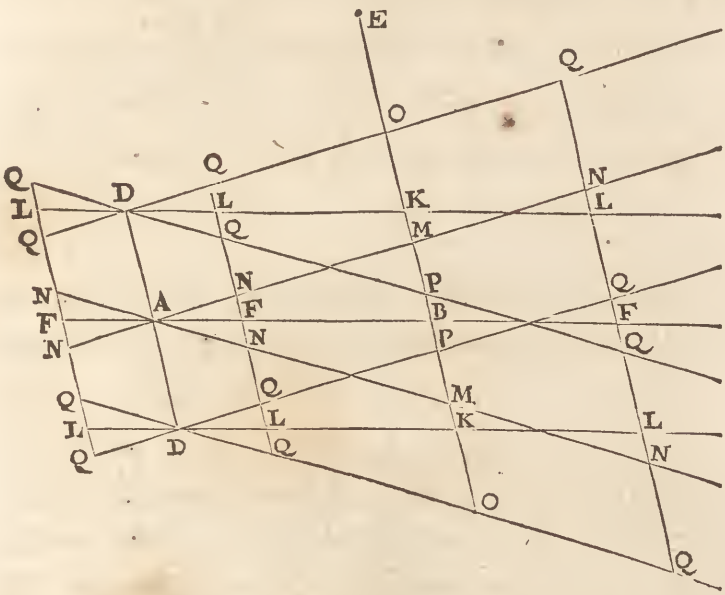
Quarto casu, ubi manente diametro in recta D K vertex est in puncto L, quoniam D L sive A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit L K (hoc est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, $DK \pm DL$, atque etiam $LD - DK$) æqualis $x \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ K E vel K B E, hoc est, zz: eritque proinde $zz \infty dx \pm ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in recta A M, cum sit ut a ad b, ita A B, hoc est, x, ad B M: erit $BM \infty \frac{bx}{a}$, ideoque M E, hoc est, $BE - BM \infty y - \frac{bx}{a}$, & M B E, hoc est, $BE + BM \infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta est pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit M E & M B E $\infty\, z$. At cum in triangulo A B M cognita sint & angulus A B M, & ratio laterum A B, B M, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est [c] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in specie etiam lateris A B ad A M, quæ sit ut a ad e. Ac proinde cum sit ut a ad e, ita A B, h.e., x ad A M: erit $AM \infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo casu sit ut A M ad A B, hoc est, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per A M seu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum $\infty\, dx$. Quod æquale est quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz; ac proin-
5. de est $zz \infty dx$.

[c] per 6 sexti.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam est ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N: erit A N $\infty\ \frac{eff}{ad}$, & N M (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, A M $\pm$ A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad}$ $-\frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz: erit
6. $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D seu M O est $\infty\ c$, erit O E (sive B E — B M — M O) $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (sive B E + B M + M O) $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E $\infty\ z$. Porrò cum D O

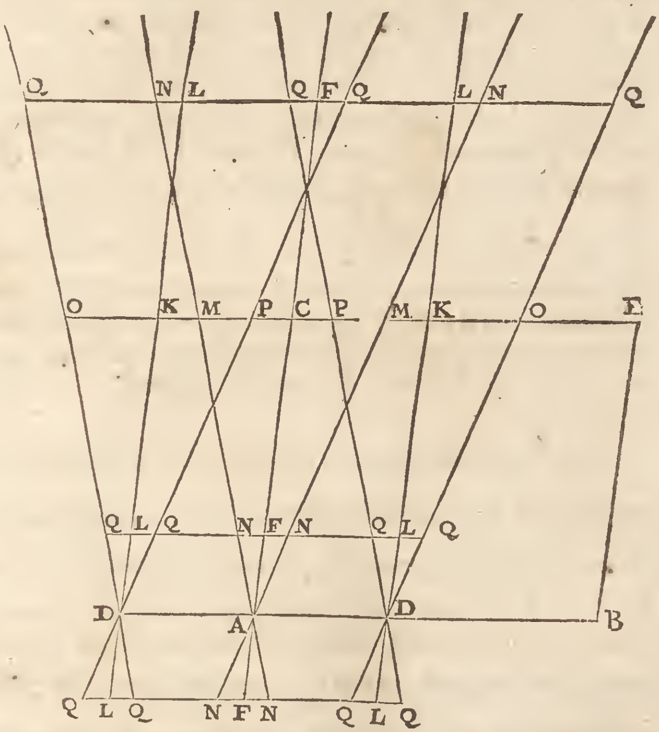
seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D O contentum $\infty\ dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id est, zz: erit $zz \infty dx$.

Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta D P, quoniam A D seu B K est $\infty\ c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (sive B E — B K + K P) $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (sive B E + B K — K P) $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\ z$. Porrò cum D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$ ac Parameter $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D P contentum $\infty\ dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ P E, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut supra, O E est $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\ z$. Et cum D O aut D P seu A M sit $\infty \frac{ex}{a}$, atque D Q seu A N $\infty \frac{eff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, D O vel D P $\pm$ D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Vnde si eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\infty\ dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriusque P E,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per pun-

punctum A ducenda est recta A C ipsi B E parallela, ac deinde ipsa A C, ubique consideranda, ut considerata fuit recta A B in superiori figura. Porrò sumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi A B parallelâ, velut O C E, erit similiter hæc O C E ubique consideranda, sicut considerata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æ-
I. quatio sit $dy \propto xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter $\propto d$. Cum enim A C seu B E sit concepta ut y, & C E seu A B ut x, rectangulumque sub Parametro & A C contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ C E seu A B, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \propto xx$.

II. Si æquatio sit $dy.ff \propto xx$, sumptâ A F $\propto \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro $\propto d$. Est

 enim

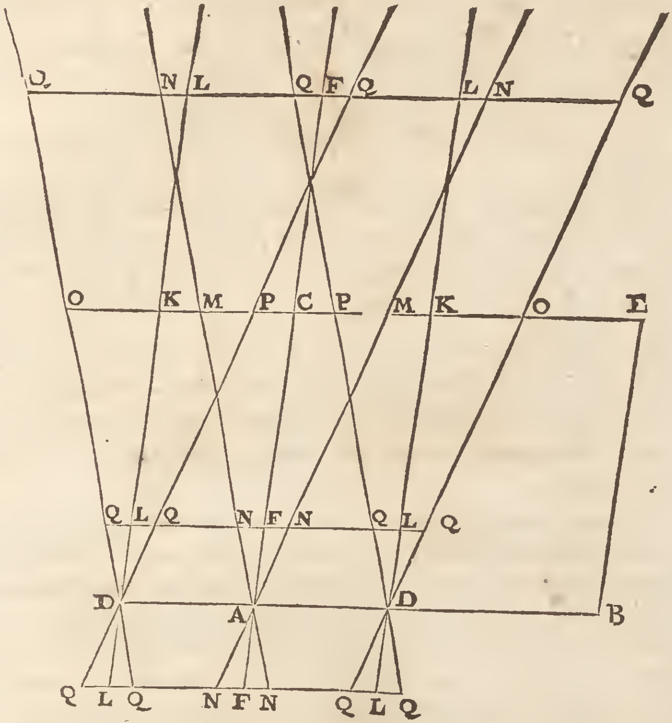
enim pro triplici juxta Regulam distinctione F C $\infty\ y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem F C contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ C E, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy.ff \infty\ xx$.

III. Si æquatio sit $dy \infty\ vv$, vel $dy.ff \infty\ vv$, atque v primùm assumpta sit pro $x \pm c$, factâ A D $\infty\ c$, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ D K ipsi A C parallelâ, diameter in recta D K. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, D B sive D A B, hoc est, K E sive K C E fore v, D K $\infty\ y$, atque L K $\infty\ y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque D K comprehensum $\infty\ dy$; at verò id quod sub d & L K comprehenditur $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ K E sive K C E, hoc est, vv: erit, ut petitur, $dy \infty\ vv$, vel $dy.ff \infty\ vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a}$, sumptoque in linea O C E puncto M à C versùs E, si habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ A C, si habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut A C sit ad C M, sicut a ad b: erit in recta A M diameter, ejusque vertex in
VI. puncto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et positâ ratione A C ad A M, ut a ad e, ac proinde recta A M $\infty\ \frac{ey}{a}$, erit Parameter $\infty\ \frac{ad}{e}$. Est enim recta C M $\infty\ \frac{by}{a}$, ac proinde M E $\infty\ y - \frac{by}{a}$, atque M C E $\infty\ y + \frac{by}{a}$, id est, M E vel M C E $\infty\ v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta A M contentum ∞ quadrato ex M E vel M C E, erit, $dy \infty\ vv$.

Porrò cum N A sit $\infty\ \frac{ffe}{da}$, erit N M $\infty\ \frac{ey}{a} \pm \frac{ffe}{da}$, atque etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum ſub Parametro & recta N M contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum ſit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc eſt, vv; erit quoque $dy.ff \infty vv$.



Sit denique v aſſumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, ſup-
VII.VIII. poſitis iiſdem quæ ſupra, diameter in D O, vel in D P;
IX. &, ſi terminus ff deficiat vertex in D; ſin minus, in Q. Et poſitâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, ſicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P $\infty \frac{ey}{a}$; erit parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Eſt enim O E $\infty\ x - \frac{by}{a} - c$, atque

O C E $\infty x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\infty x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\infty x + \frac{by}{a} - c$, hoc est, O E, O C E, & P E una vel altera erit ∞v. Estque Q O vel Q P (sicut supra N M) $\infty \frac{ey}{a} \ 8 \ \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum sub Parametro & Q O vel Q P $\infty dy \ 8 \ ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale sit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id est, vv: erit quoque $dy.ff \infty vv$.

Atque ita demonstratum est generaliter, quod hoc loco propositum fuit.

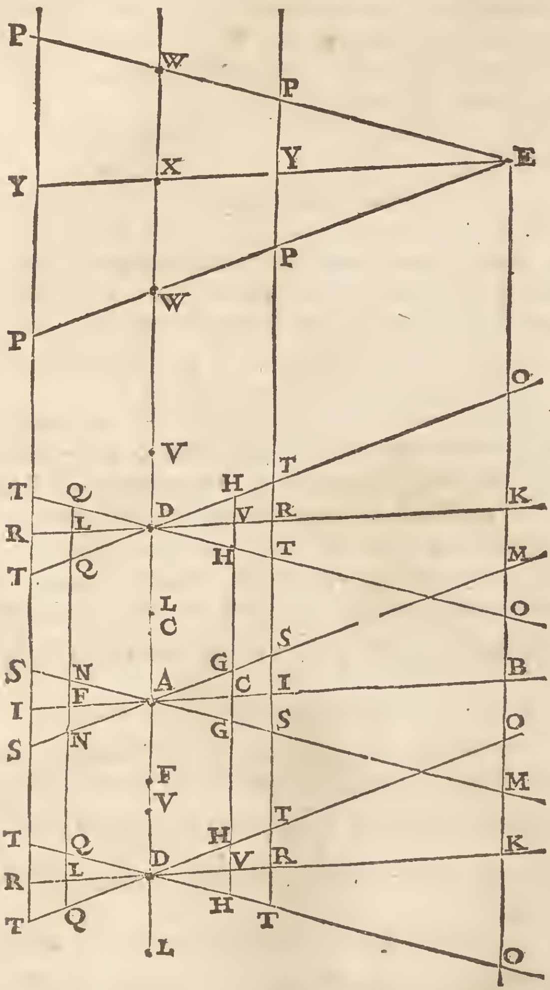
At si denique æquatio similis sit alicui formularum sub N° 3 comprehensarum, erit Locus quæsitus, si terminus in quo invenitur xx vel vv signo + sit affectus, Hyperbola; sin idem terminus signo — affectus sit, Ellipsis: excepto tantùm, cùm posteriori casu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & simul transversa diameter parametro est æqualis: quippe eo casu, ut patet, quæsitus Locus Circulus existit.

Et primo quidem casu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv signo + affectus reperitur, ac proinde Locus quæsitus est Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte constitutus vel signo + affectus, vel contra; & si signo — affectus sit, atque in æquatione habeatur fractio, ipsa majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, sequenti formâ se exhibebit æquatio : $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$: eritque, ut in sequenti figura, casu primo, nempe si terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem constituens signo + affectus sit, diameter Hyperbolæ describendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A positione datæ B E parallela. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, uti casu secundo, erit diameter in data positione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Casus 1^{mus}, cùm Locus est Hyperbola.

easdem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & semi-latus transversum ∞ f, quod in



dictis diametris respectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porrò si l sit ∞ g, vel, quod idem est, si termino xx vel yy nulla ad-

hæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam X E, quæ ducta sit ipsi A B æquidistans, ut & ipsam B E, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$F X \infty y + f, \qquad F B \infty x + f,$$
$$C X \infty y - f, \qquad C B \infty x - f;$$

ideoque rectangulum

$$F X C \infty yy - ff, \ \& \ F B C \infty xx - ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulùm F X C [1] sit ∞ quadrato ex X E seu A B, hoc est, xx; itemque rectangulum F B C sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit $yy - ff \infty xx$, hoc est, $yy \infty xx + ff$ itemque

$$xx - ff \infty yy, \text{ sive } yy \infty xx - ff.$$

[1] per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli F X C ad quadratum X E, aut rectanguli F B C ad quadratum B E eadem sit [2], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy - ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx - ff$ ad yy, hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \infty gyy - gff$, ut & $lyy \infty gxx - gff$. unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \infty yy - ff$, hoc est, $yy \infty \frac{lxx}{g} + ff$; & $\frac{lyy}{g} \infty xx - ff$. Quod demonstrandum erat.

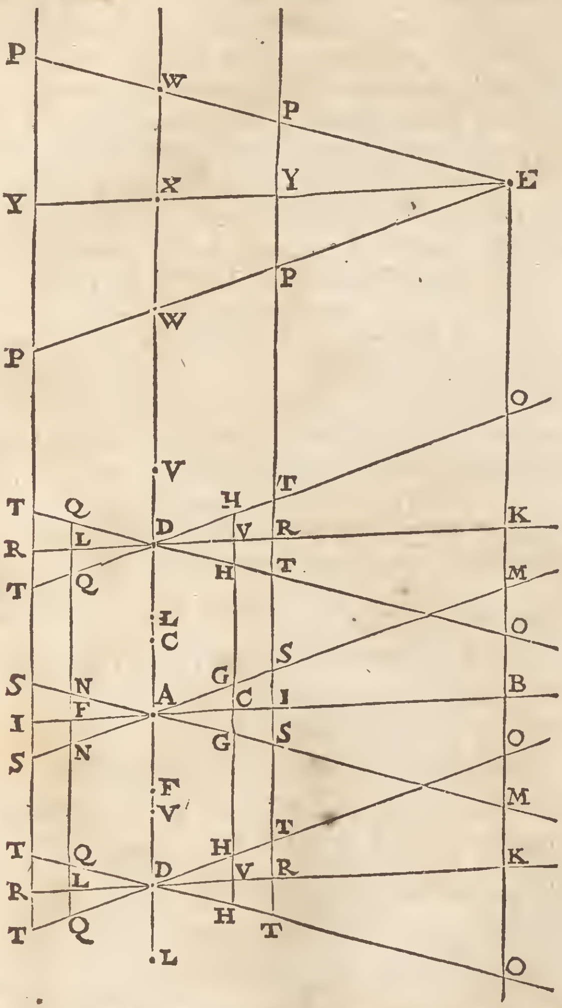
[2] per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$ (id est, $zz - ff \infty \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$: aut z assumpta erit pro $y \; 8 \; c$, vel pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$. Et quidem primò si z assumpta sit pro $y \; 8 \; c$, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela & $\infty \; c$; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E. Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo $+$ affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta recta D K; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E vel D K E sive D X E æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semilatus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas D V vel D L exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam X E, ut & ipsam K E, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit D A X sive K B E $\infty\, y+c$, & D X seu K E $\infty\, y-c$; ideoque eadem D A X & K B E vel D X & K E ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea L X $\infty\, z+f$, & L K $\infty\, x+f$

atque V X $\infty\, z-f$, & V K $\infty\, x-f$:

ideoque rectangula

L X V $\infty\, zz-ff$, & L K V $\infty\, xx-ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli L X V ad quadratum X E, ut & utriusque rectanguli L K V ad quadratum ex K E vel K B E respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz-ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty\, zz-ff$, sive $zz \infty\, \frac{lxx}{g}+ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty\, xx-ff$: aut, si l sit $\infty\, g$,

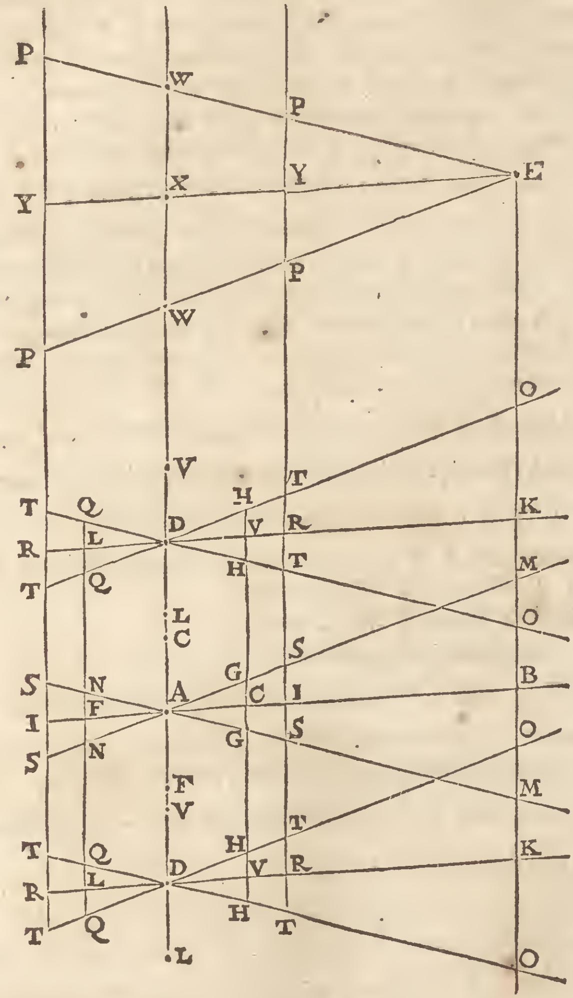
erit $zz \infty\, xx+ff$,

& $zz \infty\, xx-ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro $y \otimes \frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E puncto M, ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b; hoc est, ut B M sit $\infty\, \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B quâ datus vel conceptus angulus A B E sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty\, y+\frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ A B sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere A M, secantem H C H & Q F Q per prædicta puncta C & F ductas ipsi B E parallelas in punctis G & N. Quo

Quo facto, si terminus *ff* signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus *ff* signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa faciant

faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc est, f, ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) FW sive FXW $\infty z+f$,

& CW sive CXW $\infty z-f$:

ideoque rectangulum

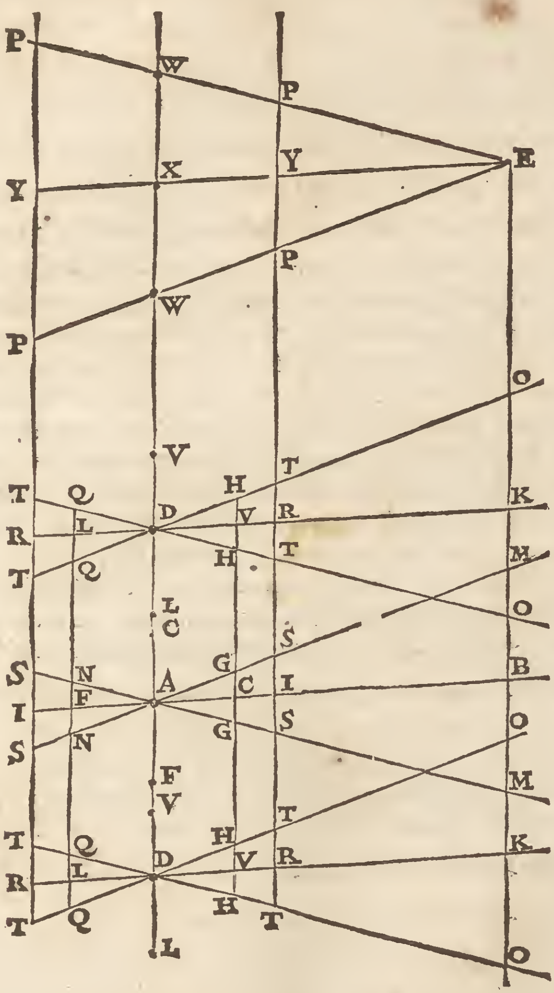
FWC vel FXWC $\infty zz-ff$, & quadratum WE $\infty \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \infty zz-ff$, id est, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff signo — est affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG

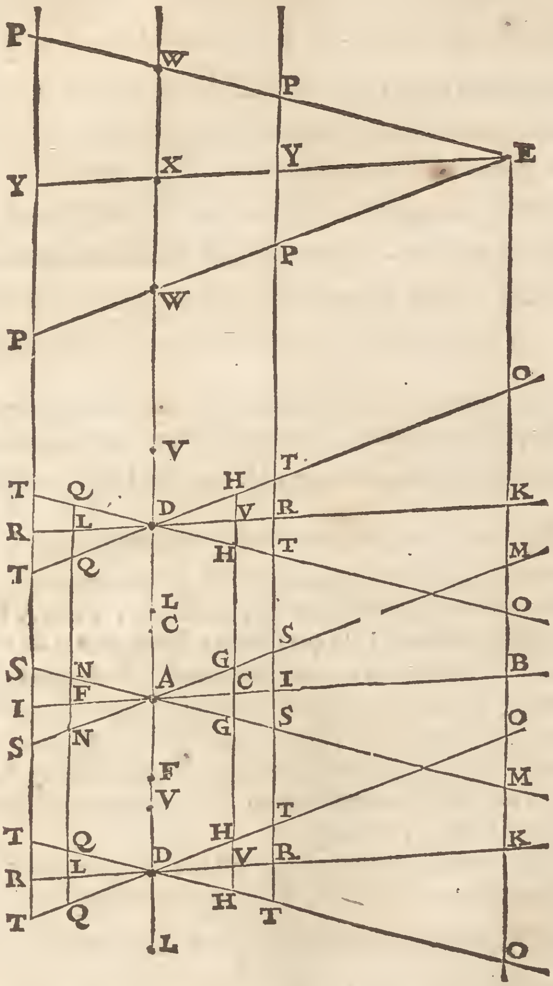
ad

ad M E vel M B E quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \propto eegxx - eegff$.



Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \propto xx - ff$. Quod hîc demonſtrandum erat.

§. 3. Si denique tertiò z aſſumpta ſit pro $y \propto \frac{bx}{a} \propto c$, ductâ, ut ſupra, A D $\propto f$, & D K ipſi A B parallelâ, ſumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut K O ſit $\propto \frac{bx}{a}$, ducenda eſt per puncta D & O recta D O, ſecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Conſtat autem ex ſuperiùs explicatis prædictum punctum O, ſi in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B ſumendum eſſe, quâ datus aut aſſumptus eſt angulus A B E; at ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipſum punctum ex altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, ſi terminus ff ſigno + affectus ſit, erit diameter quæſitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — ſit affectus, erit ipſa in prædicta recta D O; ita ut ad eaſdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E ſive D X W E, aut D O E ſive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam tranſverſa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W deſcribitur, hoc eſt, cùm terminus ff ſigno + afficitur, latus tranſverſum $\propto f$. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejuſdem lateris tranſverſi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O deſcribitur, nimirum, quando terminus ff ſigno — affectus eſt, erit ſemi-latus tranſverſum recta D Q vel D H, id eſt, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejuſdem lateris tranſverſi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim deſcripta intelligatur Hyperbola, tranſiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, ſupponaturque eandem Hyperbolam ſecare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E ſive D A X W $\propto y + c + \frac{bx}{a}$, & O E ſive D W $\propto y - c - \frac{bx}{a}$, ac O B E ſive D A W $\propto y + c - \frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W $\propto y - d + \frac{bx}{a}$. Hoc eſt, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z aſſumptæ ſunt. Eſt autem D O ſeu W E $\propto \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E $\propto \frac{eexx}{aa}$: ac porrò caſu priori, ubi deſcripta eſt Hyperbola ad diametrum D W, D W, cùm nempe terminus ff ſigno $+$ afficitur, L W ſive L X W $\infty\ z+f$, & V W ſive V X W $\infty\ z-f$: ideoque rectangulum L W V ſive L X W V $\infty\ zz-ff$. Cumque ſit ut latus



tranſverſum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad W E quadratum, hoc eſt, eo caſu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

$eexx$

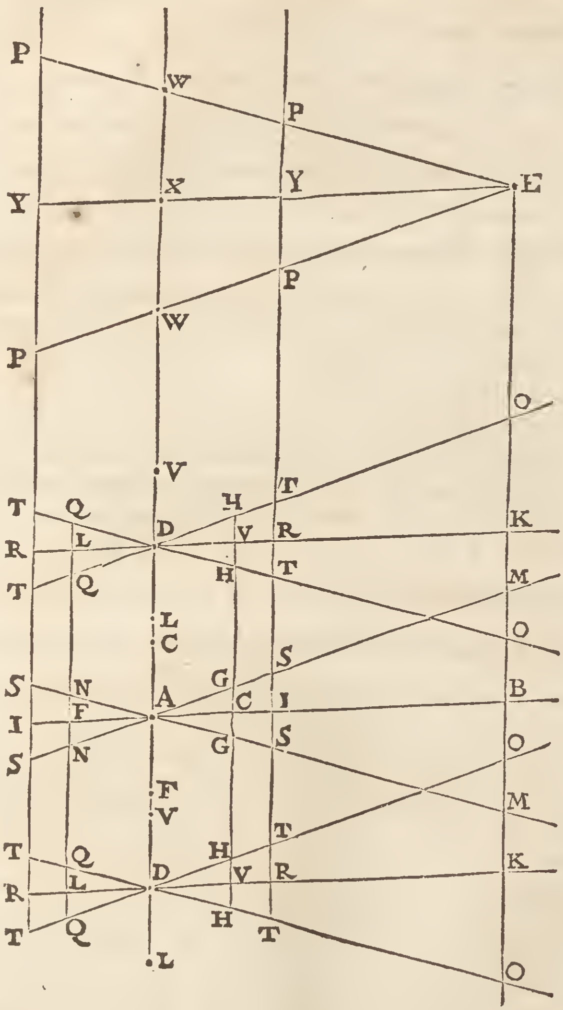
$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, sive O B E aut O K E: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est Hyperbola. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x ♉ notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x ♉ h; Hoc casu in linea A B vel eadem productâ sumendum est punctum I, ita ut A I sit ∞h (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus est Hyperbola. Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y ♉ c, ducenda est utrinque I R parallela B E, & ∞c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y vel

vel R K, ejuſque ſemi-latus tranſverſum ∞f, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, caſu ſecundo §. 1. fuſiùs explicata ſunt.



§. 2. At ſi z aſſumpta fuerit pro $y \infty \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in quo M A, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel eandem productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum ſectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta S P vel S M (atque ut ibidem A M ſeu E W erat $\infty \frac{ex}{a}$, ita hîc S M ſeu E P erit $\infty \frac{ev}{a}$: cum ſit ut A B ad A M, hoc eſt, ut a ad e, ita B I, hoc eſt, v, ad S M); eritque porrò ſemi-latus tranſverſum ∞f & $\frac{ef}{a}$ reſpectivè, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si denique z aſſumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo D O, vel quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel productam, ſi opùs ſit, interſecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & ſupra caſu ſecundo §. 3. fuſiùs expoſitum eſt. Atque eorum omnium demonſtratio in præcedentibus explicitè eſt comprehenſa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem deſignabantur per x, hîc ſint $x \pm h$, hoc eſt, v. Ita enim quod ibi erat A B & E X $\infty\, x$, hîc eſt I B & E Y $\infty\, v$; quod ibi erat D K & E X $\infty\, x$, hîc eſt R K & E Y $\infty\, v$; quod ibi erat A M & E W $\infty \frac{ex}{a}$, hîc eſt S M & E P $\infty \frac{ev}{a}$; quod ibi erat D O & E W $\infty \frac{ex}{a}$, hîc eſt T O & E P $\infty \frac{ev}{a}$.

Quamvis autem ſecundùm Regulam accidere etiam poſſit, ut v compoſita ſit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta ſit; ita tamen, ut eo caſu z ſolummodo ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ conſtare queat, haudquaquam tamen operæ pretium exiſtimamus, caſus omnes eò ſpectantes ſpeciatim perſequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in poſteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12$^{\text{mi}}$ & 13$^{\text{tii}}$ ſuperiùs explicata ſunt, iidem illi caſus per ſe manifeſti ſint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, ſi nimirum, ſubſtituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam A B ſed per eam, quæ ex A ipſi B E parallela ducta ſit, atque y non per B E ſed per rectam ipſi A B æquidiſtantem, deſignetur. Quòd hîc generaliter monuiſſe ſuffecerit.

Alii

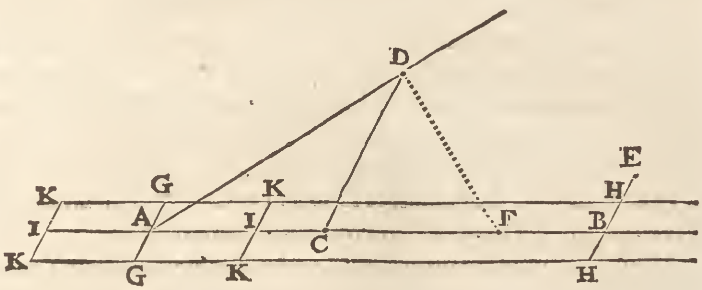
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Iam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

$$1.\ yx \propto ff,$$
$$2.\ zx \propto ff,$$
$$3.\ yv \propto ff,$$
$$4.\ zv \propto ff,$$

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta A B sumatur A C $\propto f$, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipsi B E sit æquidistans & æqualis priori A C, hoc est $\propto f$, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta A D, & punctum D vertex, atque A B asymptotos. sive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam B E in puncto E, erit [1] rectangulum A B E $\propto$ quadrato ex A C vel C D. Quare cum A B sit $\propto x$, B E $\propto y$, & A C $\propto f$: erit $xy \propto ff$. Quod primo casu erat demonstrandum. [1] *per 3 primi hujus.*

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \propto ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y ♉ notâ quâdam quantitate. Esto

 itaque

itaque assumpta pro y 8 c, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta A G ipsi B E parallela, ac ∞ c: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ A B, prout c quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò G H ipsi A B parallelâ, centro G, Asymptoto G H, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbole describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam B E in puncto E, erit rectangulum G H B E vel G H E ∞ ff. Vnde cum sit G H ∞ x, & H E vel H B E ∞ y 8 c, id est, z: erit G H E vel G H B E rectangulum ∞ zx, ac propterea zx ∞ ff. Quod 2^do^ casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit yv ∞ ff: v quoque tantùm pro x 8 notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro x 8 h. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta A B vel in ipsâ productâ sumenda est A I ∞ h, ac porrò centro I, atque Asymptoto I A B vel I B, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam B E secare supponatur in E: erit rectangulum I A B E vel I B E ∞ ff. Quare cum I A B vel I B sit ∞ x 8 h, hoc est, v, & B E ∞ y: erit yv ∞ ff. Quod 3^tio^ casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit zv ∞ ff: erit z assumpta pro y 8 c, & v pro x 8 h. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est I K ipsi B E æquidistans & ∞ c; ductâque K H ipsi A B parallelâ, centro K, atque Asymptoto K G H vel K H, cæterisque, ut casu 1^mo^, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam B E in E: erit rectangulum K G H E vel K H E, ut & K G H B E vel K H B E ∞ ff. Hinc cum H B E vel H E sit ∞ y 8 c, id est, z, & K G H vel K H ∞ x 8 h, hoc est, v: erit zv ∞ ff. Quod 4^to^ casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^ro^ 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate

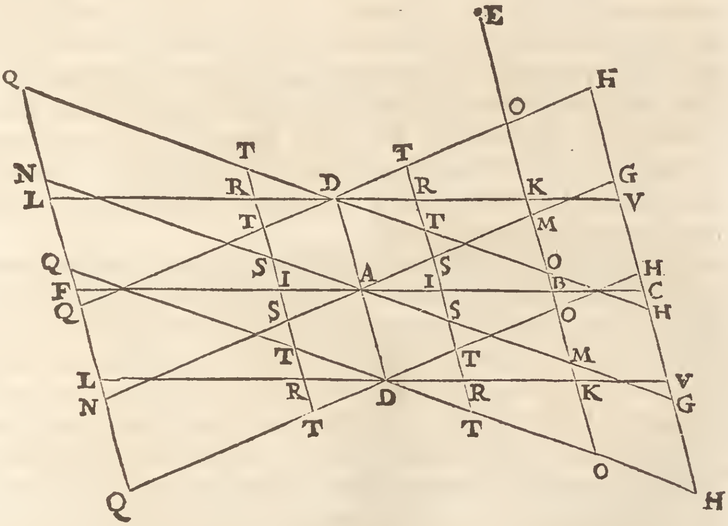
inco-

incognitâ ab initio conceptâ, ſequenti formulâ ſe exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in ſequenti figura, deſcribendæ Ellipſeos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè eſt concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejuſdem tranſverſi lateris ad rectum, ut l ad g.

Caſus 1mus, cum Locus vel Ellipſis vel Circuli circumferentia exiſtit.

Si enim deſcripta intelligatur prædicta Ellipſis, tranſiens per puncta C & F, ſecansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipſeos, lateribus recto tranſverſoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [1] ſit ∞ quadrato ex B E, hoc eſt, yy: erit quoque proinde eo caſu $yy \infty ff - xx$. Et facilè

[1] *per 13 primi hujus.*



apparet, ſi, iiſdem poſitis, B E ſuper rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc eſt, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum ſit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus tranſverſo rectoque inæqualibus

¹ per 13 primi hujus. atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio ¹ rectanguli F B C ad B E quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

Casus 2dus, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro $y \, 8 \, c$, aut pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a}$, aut pro $y \, 8 \, c \, 8 \, \frac{bx}{a}$.

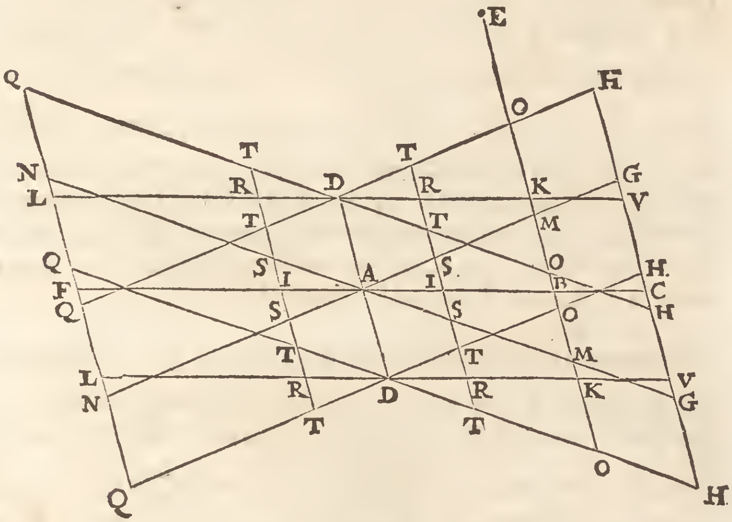
§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro $y \, 8 \, c$, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela ac $\infty \, c$, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ A B reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E, productam versùs B, si opùs fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta D K, ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E seu D K E æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum $\infty \, f$. quod in dictis diametris per lineas D V & D L exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit K B E $\infty \, y + c$, & K E $\infty \, y - c$, ideoque eadem K B E vel K E ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque L K sit $\infty \, f + x$, & K V $\infty \, f - x$: erit rectangulum L K V $\infty \, ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli L K V ad quadratum ex K B E vel K E, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit $\infty \, g$, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo D K B E vel D K E recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo L K V ∞ K E quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro $y \, 8 \, \frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E,

pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b, hoc est, ut B M sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ A B parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, secantem rectam H C H, atque occurrentem ipsi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipsi B E ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, si ratio A B ad A M supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e, ita A C, hoc est, f, ad A G.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id est, si l sit

∞g,

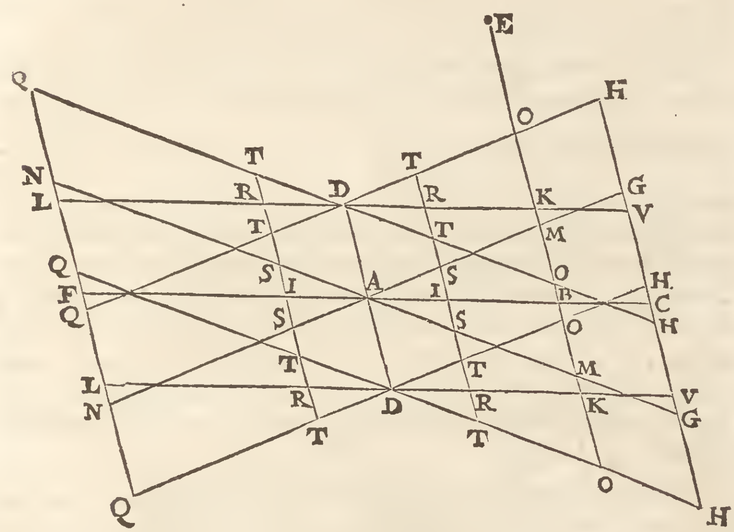
∞g, ſive, quod idem eſt, ſi termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc eſt, ut A M quadratum ad quadratum A B.

Etenim ſi prædicta Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per N & G, ſupponaturque eandem ſecare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem M E $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & M B E $\infty\, y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipſa, quæ pro z aſſumpta eſt. Cumque A M ſit ∞ $\frac{ex}{a}$, erit N M $\infty\, \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty\, \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\infty\, \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli N M G ad quadratum ex M B E vel M E, quæ eſt lateris tranſverſi ad rectum, hoc eſt, eadem quæ eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\, eegff - eegxx$. id eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\, ff - xx$. ſive, poſitâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quòd ſi angulus A M B E vel A M E rectus ſit, ac ſimul $eel \infty aag$, hoc eſt, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum ſit A, & ſemi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique ſi tertiò z aſſumpta ſit pro y ♉ c ♉ $\frac{bx}{a}$, ductâ, ut ſupra, A D ∞f, & D K ipſi A B parallelâ, ſumptoque in linea K E puncto O, ita ut D K ad K O ſit, ſicut a ad b, hoc eſt, ut K O ſit $\infty\, \frac{bx}{a}$: ducenda eſt per puncta D & O recta Q D O H, ſecans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (conſtat autem ex iis, quæ jam ſæpiùs monita ſunt, ſi habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ D K, quâ datus vel aſſumptus eſt angulus D K E, ſumendum eſſe; at ſi habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipſum ab altera ejuſdem lineæ parte ſumi debere.) Quo facto, erit deſcribendæ Ellipſeos diameter in prædicta recta Q D H, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo DOKE vel DOE æquales. Porrò centrum erit in D, & ſemi-latus tranſverſum DQ vel DH ∞ AN ſeu $\frac{ef}{a}$, ac ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

Si enim quæſita Ellipſis deſcripta intelligatur, tranſiens per puncta Q & H, eademque ſecare ſupponatur rectam OE vel OKE in puncto E: erit OKBE $\infty\ y+c+\frac{bx}{a}$, OE ∞



$y-c-\frac{bx}{a}$, OBE $\infty\ y+c-\frac{bx}{a}$, & OKE $\infty\ y-c+\frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z aſſumptæ ſunt. Cumque porrò ſit DO ſeu AM $\infty\ \frac{ex}{a}$, ideoque QO $\infty\ \frac{ef}{a}+\frac{ex}{a}$, & OH $\infty\ \frac{ef}{a}-\frac{ex}{a}$: erit rectangulum QOH $\infty\ \frac{eeff-eexx}{aa}$. At cum eadem ſit ratio dicti rectanguli QOH ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \infty eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. id est, si l sit ∞g, erit $zz \infty ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & simul $eel \infty aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3^tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro x ♉ notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x ♉ h, eritque eo casu in linea A B vel A F sumendum punctum I; ita ut A I sit ∞h. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta I B, ac semi-latus transversum erit ∞f, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

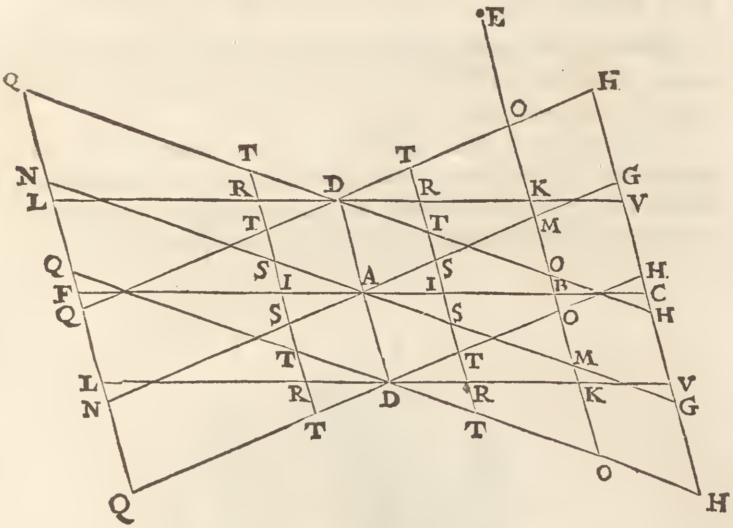
Casus 4^tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.

Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro y ♉ c, ducenda est utrinque I R, parallela ipsi B E, ac ∞c. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus semi-

§. 1. latus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia Casu 2^do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y ♉ $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A, vel,

vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut ſupra caſu ſecundo §. 2. memoratum eſt. Nempe erit ſectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat AM ∞ $\frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum ſit ut BA ad AM, hoc eſt, ut a ad e, ita BI, id eſt, v, ad SM:) eritque porrò ſemi-latus tranſ-



verſum ∞ $\frac{ef}{a}$, & ratio tranſverſi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique ſi z aſſumpta fuerit pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipſi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, ſi opùs fuerit, interſecatur, centrum Ellipſeos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac ſupra caſu ſecundo §. 3 fuſiùs

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta T O, & semi-latus transversum $\infty \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per x ♉ h, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat A B ∞ x, hîc est I B ∞ v; quod ibi erat D K ∞ x, hîc est R K ∞ v; quod ibi erat A M $\infty \frac{ex}{a}$, hîc est S M $\infty \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat D O $\infty \frac{ex}{a}$, hic est T O $\infty \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

FINIS.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,

dum viveret in Academia Lugduno-Batava
Matheseos Professoris,

TRACTATUS
DE
CONCINNANDIS
DEMONSTRATIONIBUS
GEOMETRICIS
ex Calculo Algebraïco.

In lucem editus

à

PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratre.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Nobilissimis & Splendissimis Viris, Academiæ Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

D. AMELIO à BOVCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, I. C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Vrbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORVMQVE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidensis Consulibus,

D. CORNELIO à BVYTEVEST.

D. GVILHELMO PAETS, I.C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAVLO à SWANENBVRG, I. C. in Præpotentium Fœderati Belgii Ordinum Consessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, I.C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. IOHANNI à WEVELINCHOVEN, I. C. Reip. Leidensis Syndico, & D D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini plurimum honorandi,

GEminam assequendæ veritatis methodum, quarum altera Synthesis sive Compositio dicta, altera Analysis vocata sive Resolutio, cumprimis in Mathesi à Veteribus frequentatam tritamque fuisse, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p.m. Frater, postquam methodo Synthetica scientiæ hujus præclara multa publicis tam scriptis quam prælectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendæ rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent. Sed cum Veterum dissimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præstantem usum non modo à multis ignorari ac negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli Synthesi miserando labore inhæreretur: consultum judicavit hac peculiari diatriba ostendere, ipsum quoque Syntheticum demonstrandi modum in Analysi contineri, atque ex ea elici posse; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda sit. Sed vix huic tractatui supremam imposuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut posthumus idem atque novissimus industriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui destinatus erat, rite & honeste prodire posset: ego, ut defun-

defuncti frater unicus, mei eſſe officii atque pietatis exiſtimavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; ſed etiam pro veneratione & obſervantia, quæ vobis, Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati veſtræ ac honori conſecrare. Vtique futurum ſpero, ut cujus ingenii primitias, illuſtribus veſtris nominibus olim inſcriptas, propitia benignitate excepiſtis, hunc quoque ultimum ejuſdem fructum gratioſe ſuſcipiatis. Neque ſolita humanitas veſtra obſtare ſinet meam offerentis tenuitatem, qui ſimul hoc quantulocunque conatu pro veſtris non modo in Fratrem, ſed etiam in p. m. Parentem meum, longi temporis beneficiis meritiſque gratum animum profiteri ac teſtari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipſo, luculentius aliquando me facturum confido, ſi & mihi, à prima ætate ſimilibus ſtudiis innutrito, benevolentiæ & favoris veſtri auram aſpirare contingat. Interim DEVM OPT. MAX. ſuppliciter oro, ut conſilia veſtra & pro Reip. ſalute atque Academiæ decore curas ſecundet, optimiſque ſucceſſibus donet.

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRVS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN
Tractatus
De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco.

LECTORI S.

QVoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere judicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum æquetur quadrato rectæ C D. *Vide sequentem figuram.*

Series *Analyseos* sive *Resolutionis.*

Supposito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& B D vel D E. x: eritque A D. $a+b+x$, & C D. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico A D. $a + b + x$
per B D vel D E. x

Eritque rectangulum sub A D, D B comprehensum, hoc est, ▭ A D E F. $ax + bx + xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + \; bx + xx \\ bb + bx \end{array}$$

Et fit quadratum ex CD, hoc est, □ CDGH. $bb + 2bx + xx$.

Vnde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,

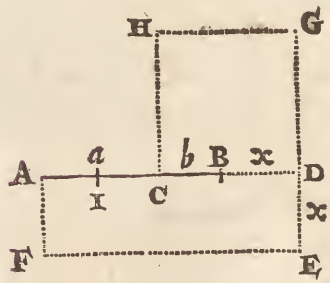
eritque $ax \propto bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,

& fit $ax - bx \propto bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $a - b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, qualis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI sit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b$ & b, esse inveniendam 3^tiam^ proportionalem BD.

Vnde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypotheſi ▭ A D B ſit æquale □^to ex C D,

$$ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx$$

ablato utrinque ▭^lo ſub C D & D B,

$$bx+xx$$

erit [a] ▭ ſub A C & D B æquale ▭^lo ſub C D & C B [b]. *a per 1 ſecundi.*

$$ax \quad \propto \quad bb+bx.$$

Rurſus auferatur utrinque ▭ ſub I C vel C B & B D, id eſt, bx, *b per 2 ſecundi.*

eritque [c] ▭ ſub A I & B D æquale □^to ex C B [d]. *c per 1 ſecundi.*

$$ax-bx \quad \propto \quad bb.$$

Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit [e] *d per 3 ſecundi.*

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D. *e per 17 ſexti.*

$a-b$ —— b —— b / x. Quod erat propoſitum.

Quoniam autem præſtare videtur, loco horum æqualium rectangulorum conſiderare laterum proportionem, quandoquidem in demonſtrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones ſchematum contemplationi inſuper ſunt aſtringendæ, linearum hæc inter ſe collatio ſimplicior eſt cenſenda quàm planorum aut ſolidorum, ipſaque etiam figuras requirit minùs intricatas, vel ſaltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòuſque continuanda varièque tranſmutanda, utendo ſc. ad id modis argumentandi libro 5^to Elementorum expoſitis, donec appareat quæſitum ex tribus prioribus proportionis terminis conſtare ſeu inveniri poſſe. Quod ipſum ut rectiùs percipiatur, viſum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonſtrationem hîc afferre, qualis illa à principio uſque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amuſſim reſpondet.

Etenim cum ex hypotheſi ſit

▭ A D B æquale □^to ex C D:

$$ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx:$$

Erit

f per 17 ſexti. Erit [f], reſolvendo æqualitatem in proportionem,

ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum ſit

ut totum AD ad totum CD,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam [g]

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

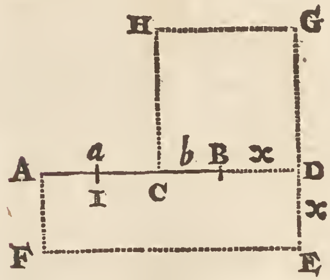
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo [h]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic ſit locus, patet, rectam AC ipſâ CB debere eſſe majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati eſſe præfigendam, cum ſine eâ conſtare nequeat, ſi velimus ut quæſitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum BC ex CA eſt ſubtrahenda.



Idem etiam liquet, ſupponendo AC æqualem aut minorem quàm CB. Nam AC æquali exiſtente ipſi CB, non poſſet rectangulum ADB quadrato ex CD æquale eſſe: cum illud [i] unà cum quadrato ex CB ei tantum æquale exiſtat. Et quidem ſi AC ipſâ CB minor ſit, manifeſtum eſt, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multò minus fore.

i per 6 ſecundi.

Cum igitur conſtet Determinatio, Problema conſtruetur hoc modo:

Conſtructio.

Aſſumptâ CI æquali CB, ſi fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF,

quod

quod ſub A D & D B ſeu D E comprehenditur, æquale eſſe quadrato C D G H, à recta C D deſcripto.

Quod ipſum retrogrado ordine fit manifeſtum, incipiendo ab Analyſeos fine & per ejuſdem veſtigia redeundo ad illius principium.

NOTA Hujus atque ſequentium Problematum Compoſitiones retro legendas eſſe.

Finis *Compoſitionis.*

habebitur [k]

▭ ſub A D & D B ſeu ADEF æquale □^to ex C D ſeu CDGH [l].

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

Quod erat faciendum.

Rurſus addito utrinque ▭^lo ſub C D & D B, id eſt, $bx + xx$,

fiet [m] ▭ ſub A C & D B æquale ▭^lo ſub C D & C B [n].

$$ax \quad \infty \quad bb + bx.$$

Deinde addito utrinque ▭^lo ſub I C vel C B & B D, id eſt, bx, ut in alteram tranſeat partem,

erit [o] ▭ ſub A I & B D æquale □^to ex C B.

$$ax - bx \quad \infty \quad bb.$$

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$$a - b \text{ —— } b \text{ —— } b \,/\, x$$

Etenim cum ex Conſtructione ſit

k *per* 1 *ſecundi.*
l *per* 2 *ſecundi.*
m *per* 1 *ſecundi.*
n *per* 3 *ſecundi.*
o *per* 17 *ſexti.*

Principium *Compoſitionis.*

Alia ejuſdem Problematis Compoſitio, per veſtigia proportionalium ſecundæ Reſolutionis regrediens.

Finis *Compoſitionis.*

erit [p] ▭ ſub AD & BD ſeu ADEF æquale □^to ex CD ſeu CDGH.

$$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$$

Quod erat faciendum.

p *per* 17 *ſexti.*

id eſt, revocatâ proportione ad æqualitatem, q per 12 quinti. erit etiam [q]

ut AD ſumma antec. ad CD ſummã conſ., ita CD una antec. ad BD unam conſeq.

$\underline{a+b+x \text{ ——— } b+x} \text{ ——— } b+x \text{ ——— } x$

ita CD anteced. ad BD conſequentem:

$b+x \text{ ——— } x$

Hinc cum ſit ut AC antec. ad CB conſeq.,

$a \text{ ——— } b$

ut AC ad CB, ita CD ad BD.

$a \text{ —— } b \text{ —— } b+x / \; x.$

r per 18 quinti. erit componendo [r]

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:

$a-b \text{ —— } b \text{ ——— } b / \; x$

Cum enim ex conſtructione ſit

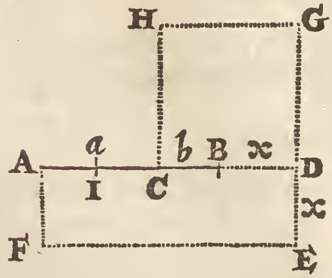
Principium *Compoſitionis*

His igitur ita ſe habentibus, ſi velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Conſtructio Problematis, tum ejus demonſtratio fuit inventa, tantummodo conſtet, allatâ Conſtructione quæſitum ſemper obtineri: poterimus, calculi veſtigiis nunc prætermiſſis, hujuſmodi ad id afferre demonſtrationem.

Demonſtratio.

s per 17 ſexti. t per 1 ſecundi. u per 3 ſecundi. x per 1 ſecundi. y per 2 ſecundi.

Cum enim ex conſtructione AI ſit ad IC vel CB, ſicut CB ad BD: erit [s] rectangulum ſub extremis AI & BD æquale quadrato mediæ CB. Quibus ſi addatur commune rectangulum ſub IC vel CB & BD, erit & [t] rectangulum ſub AC & BD [u] æquale rectangulo ſub CD & CB. His igitur ſi rurſus addatur commune rectangulum ſub CD & DB, erit ſimiliter [x] rectangulum ſub AD & DB ſeu ADEF [y] æquale quadrato ex CD. Quod erat faciendum.



Vel

Vel etiam ſic:

Cum ex conſtructione A I ſit ad I C vel C B, ſicut C B ad B D: erit componendo [a] A C ad C B, ſicut C D ad B D. Sed ut una antecedentium C D ad unam conſequentium B D, ita ſunt [b] antecedentes A C & C D ſimul, id eſt, tota A D, ad conſequentes C B & B D ſimul, id eſt, ad totam C D. Æqualia igitur ſunt [c] quadratum C D & rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

a per 18 quinti.
b per 12 quinti.
c per 17 ſexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebræ munus eſt eam deinde juxta certas regulas tranſmutare, ſervando ſemper æqualitatem, ſic ut tandem conſtet, quo pacto illius ope quæſita quantitas ex datis inveniri poſſit: non inconveniens duxi, ſi unà hîc oſtenderem, quibus modis aliquot illius uſitatiores tranſmutationes in proportiones reſolvi queant, cum hæ, ut ſupra monitum fuit, in Problematîs Geometricè reſolvendis ac in Theorematîs ſolito more demonſtrandis, concinniores ſint judicandæ; præſertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimenſiones aſcendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia eſt, quâ ratione per Geometriæ Elementa ſit explicanda.

Typus aliquot æquationum, ſecundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correſpondentes reſolutio; tam ad Problematum Reſolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonſtrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraïcæ	*Reſolutiones Geometricæ.*	
Si fuerit $ax \propto bc$: dividatur utrinque per a. fit $x \propto \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.	d per 16 ſexti.
Si ſit $ax + bx \propto cd$: dividatur utrinque per $a + b$ fit $x \propto \frac{cd}{a + b}$.	erit [e] ut $a + b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a + b$ ad d, ita c ad x.	e per 16 ſexti.

Si

f per 16 sexti.

Si sit $ax \propto bc \; 8 \; dc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \propto \dfrac{bc \; 8 \; dc}{a}$.

erit [f] ut a ad $b \; 8 \; d$, ita c ad x.
vel permutatim
ut a ad c, ita $b \; 8 \; d$ ad x.

g per 16 sexti.

Si sit $ax \; 8 \; bx \propto cd \; 8 \; ed$:
dividatur utrinque per $a \; 8 \; b$
fit $x \propto \dfrac{cd \; 8 \; ed}{a \; 8 \; b}$.

erit [g] ut $a \; 8 \; b$ ad $c \; 8 \; e$, ita d ad x.
vel permutatim
ut $a \; 8 \; b$ ad d, ita $c \; 8 \; e$ ad x.

h per 16 sexti.

Si sit $ax \propto bb - cc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \propto \dfrac{bb - cc}{a}$.

erit [h] ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x.
vel permutatim
ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

i per 16 sexti.
** Vt supra ad notam †*
k per 17 quinti.

Si sit $ax \propto bb + bx$: *
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto bb$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \propto \dfrac{bb}{a-b}$.

erit [i] ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
& dividendo [k]
ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l per 16 sexti.
m per 18 quinti.

Si sit $ax \propto bb - bx$:
addatur utrinque bx:
eritque $ax + bx \propto bb$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \propto \dfrac{bb}{a+b}$.

erit [l] ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
& componendo [m]
ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n per 16 sexti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $ax - ac \propto bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \propto bx + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto ac$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \propto \dfrac{ac}{a-b}$.

erit [n] ut a ad b, ita x ad $x - c$.
& dividendo [o]
ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
& per compositionem rationis contrariam [p]
ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q per 16 sexti.
r per 17 quinti.

Si sit $ax - ac \propto bx + bc$:
addito utrinque ac
erit $ax \propto bx + bc + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto bc + ac$.

erit [q] ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$. &
& dividendo [r]
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
Vbi liquet, etiamsi 4^tus^ hîc terminus proportionalis quantitatem

dividatur utrinque per $a-b$

fit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulterius sic argumentari.

α Haud secus, cum sit

ut a ad b, ita $x+c$ ad $x-c$,

erit invertendo [a] — a per Coroll. 4 quinti.

ut b ad a, ita $x-c$ ad $x+c$.

& per compositionem rationis contrariam [b] — b vide Clavium ad 18 quinti.

ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$.

Hinc cum $a-b$ —— b....... $b+a$

sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x-c$....... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, — c per 22 quinti.

$a-b$ ad $b+a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [d] — d per 15 quinti.

Si sit $ac+ax \infty bc-bx$:

addito utrinque bx

erit $ac+ax+bx \infty bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax+bx \infty bc-ac$.

dividatur utrinque per $a+b$

fit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$.

erit [e] ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$. α — e per 16 sexti.

& componendo [f] — f per 18 quinti.

ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.

Rursus cum sit

α ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$,

erit invertendo [g] — g per Coroll. 4 quinti.

ut b ad a, ita $c+x$ ad $c-x$.

& per conversionem rationis [h] — h per Coroll. 19 quinti.

ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$.

Hinc cum $a+b$ —— b.... $b-a$ ſint 3 magnitudines ab una parte, & $2\,c$ —— $c+x$.... $2\,x$ tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,

i *per* 22 *quinti.*

$a+b$ ad $b-a$, ſicut $2\,c$ ad $2\,x$ ſeu c ad x.[k]

k *per* 15 *quinti.*

l *per* 16 *ſexti.*

m *per* 17 *quinti.*

Si ſit $ax+ac \infty bx-bc$:
addito utrinque bc
erit $ax+ac+bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac+bc \infty bx-ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

n *per Cor.* 4 *quinti.*

erit [l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$. α
& dividendo [m]
ut $b-a$ ad a, ita $2\,c$ ad $x-c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$;
erit invertendo [n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compoſitionem rationis contrariam [o]
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2\,x$.

o *vide Clavium ad* 18 *quinti.*

Hinc cum $b-a$ —— a...... $a+b$ ſint 3 magnitudines ab una parte, & $2\,c$ —— $x-c$...... $2\,x$, tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt ordinata: erunt ipſæ quoque [p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc eſt,

p *per* 22 *quinti.*

$b-a$ ad $a+b$, ſicut $2\,c$ ad $2\,x$ ſeu c ad x.[q]

q *per* 15 *quinti.*

r *per* 16 *ſexti.*

s *per* 18 *quinti.*

Si ſit $ac-ax \infty bx+bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx+ax+bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac-bc \infty bx+ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$

t *per Cor.* 4 *quinti.*

u *per Cor.* 19 *quinti.*

erit [r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$. α
& componendo [s]
ut $b+a$ ad a, ita $2\,c$ ad $x+c$.
Rurſus cum ſit
α ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo [t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per converſionem rationis [u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2\,x$.

Hinc

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$ sint 3 magnitudines ab una parte, & $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$ tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, [a per 22 quinti.]

$b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [b] [b per 15 quinti.]

erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. [c per 16 sexti.] Vnde concluditur c esse ∞ x. Nam minor esse non potest, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod est absurdum. [d per 18 quinti.] Similiter major esse nequit, quandoquidem per compositionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde absurdum est. [e vide Clavium ad 18 quinti.] Nec aliter se res habet in sequenti formula.

Si sit $ax - ac \infty bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bc + ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. [f per 16 sexti.] Vnde rursus ut ante concluditur c esse ∞ x: cum nec major nec minor esse possit.

Si sit $ac - ax \infty bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritque $ac + bc \infty ax + bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulteriùs hîc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematis conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superiùs reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

	Compositiones Algebraïcæ	*Compositiones Geometricæ*
a per 16 *sexti.*	fit $ax \infty bc.$ multiplicetur utrinque per a	erit [a] $ax \infty bc.$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h.e., si sit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:

b per 16 *sexti.*	fit $ax \pm bx \infty cd.$ multiplicetur utrinque per $a \pm b$	erit [b] $ax \pm bx \infty cd.$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd}{a \pm b}$: h.e., si sit ut $a \pm b$, ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita c ad x:

c per 16 *sexti.*	fit $ax \infty bc \pm dc.$ multiplicetur utrinque per a	erit [c] $ax \infty bc \pm dc.$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bc \pm dc}{a}$: h.e., si sit ut a ad $b \pm d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \pm d$ ad x:

d per 16 *sexti.*	fit $ax \pm bx \infty cd \pm ed.$ multiplicetur per $a \pm b$	erit [d] $ax \pm bx \infty cd \pm ed.$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$: h.e., si sit ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x:

e per 16. *sexti.*	fit $ax \infty bb - cc.$ multiplicetur utrinque per a	erit [e] $ax \infty bb - cc.$ facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h.e., si sit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

fit $ax \propto bb + bx$. erit [f] $ax \propto bb + bx$. *f per 16 sexti.*
addatur utrinque bx id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
eritque $ax - bx \propto bb$. ut a ad b, ita $b + x$ ad x.
multiplicetur utrinque per $a - b$ erit componendo [g] *g per 18 quinti.*

Si sit $x \propto \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: ‡ *Vt supra ad notam ‡*

fit $ax \propto bb - bx$. erit [h] $ax \propto bb - bx$. *h per 16 sexti.*
auferatur utrinque bx id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
eritque $ax + bx \propto bb$. ut a ad b, ita $b - x$ ad x.
multiplicetur utrinque per $a+b$ erit dividendo [i] *i per 17 quinti.*

Si sit $x \propto \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:

fit $ax - ac \propto bx$. erit [k] $ax - ac \propto bx$. *k per 16 sexti.*
auferatur utrinque ac id est, reducendo proportionem ad æqualitatem
eritque $ax \propto bx + ac$. ut a ad b, ita x ad $x - c$.
addatur utrinque bx & componendo [l] *l per 18 quinti.*
erit $ax - bx \propto ac$. ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.
multiplicato utrinque per $a - b$ erit per divisionem rationis contrariam [m] *m vide Clavium ad 17 quinti.*

Si sit $x \propto \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:

erit [n] $ax - ac \propto bx + bc$. *n per 16 sexti.*
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$
& componendo [o] *o per 18 quinti.*
ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.
fit $ax - ac \propto bx + bc$. vel, sumptis consequentium semissibus, [p] *p vide Clavium ad 22 quinti.*
auferatur utrinque ac.
eritque $ax \propto bx + bc + ac$. ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
addatur utrinque bx id est, per divisionem rationis contrariam, [q] *q vide Clavium ad 17 quinti.*
erit $ax - bx \propto bc + ac$.

 mulr per 15 quinti.

multiplicato utrinque per $a - b$ ut $a - b$ ad $b + a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam [r]

Si sit $x \infty \frac{bc + ac}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad $b + a$, ita c ad x:

s per 16 sexti. t per 17 quinti. u vide Clavium ad 22 quinti. x vide Clavium ad 18 quinti. y per 15 quinti.

erit [s] $ac + ax \infty bc - bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $c - x$ ad $c + x$.
& dividendo [t]
ut $a + b$ ad b, ita $2c$ ad $c + x$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [u]
ut $a + b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c + 2x$.
id est, per compositionem rationis contrariam, [x]
ut $a + b$ ad $b - a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [y]

fit $ac + ax \infty bc - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ac + ax + bx \infty bc$.
addatur utrinque ac
erit $ax + bx \infty bc - ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$

Si sit $x \infty \frac{bc - ac}{a + b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad $b - a$, ita c ad x:

z per 16 sexti. a per 18 quinti. b vide Clavium ad 22 quinti. c vide Clavium ad 17 quinti. d per 15 quinti.

erit [z] $ax + ac \infty bx - bc$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut b ad a, ita $x + c$ ad $x - c$.
& componendo [a]
ut $b - a$ ad a, ita $2c$ ad $x - c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [b]
ut $b - a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
id est, per divisionem rationis contrariam, [c]
ut $b - a$ ad $a + b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [d]

fit $ax + ac \infty bx - bc$.
auferatur utrinque bc.
eritque $ax + ac + bc \infty bx$.
addatur utrinque ax
erit $ac + bc \infty bx - ax$.
multiplicato utrinque per $b - a$

Si sit $\frac{ac + bc}{b - a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b - a$ ad $a + b$, ita c ad x:

fit

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$. e per 16
id eſt, reducendo proportionem ſexti.
ad æqualitatem
ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.
& dividendo [f] f per 17
ut $b + a$ ad a, ita $2c$ ad $x + c$. quinti.
vel, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, [g] g vide
ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$. Clavium
id eſt, per compoſitionem rationis contrariam, [h] ad 22 quinti.
ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$. h vide Clavium
erit etiam [i] ad 18 quinti.

fit $ac - ax \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty bx + ax + bc$.
addatur utrinque bc
erit $ac - bc \infty bx + ax$.
multiplicato utrinque per $b + a$
Si ſit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc eſt, ſi ſit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x: i per 15 quinti.

fit $ax - ac \infty bc - bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bc + ac - bx$.
auferatur utrinque bx
erit $ax + bx \infty bc + ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$
Si ſit $x \infty c$: ſeu, quod idem eſt, ſi x ſit ad c, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \infty bx - bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty ax + bx - bc$.
auferatur utrinque bc
erit $ac + bc \infty ax + bx$.
multiplicato utrinque per $a + b$
Si ſit $c \infty x$: ſeu, quod idem eſt, ſi c ſit ad x, ſicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compoſitionibus hiſce Algebraïcis factum eſt.

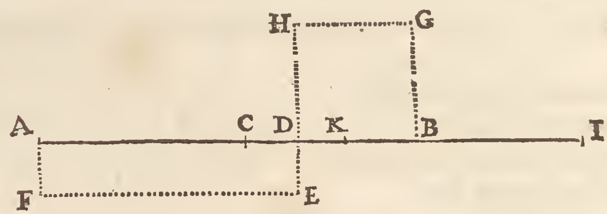
PRO-

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub A D, D C comprehensum sit æquale quadrato ex D B.

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& C D. x; eritque A D ∞ $a + x$, & D B ∞ $b - x$.



Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico A D. $a + x$
per D C seu D E. x

Et fit rectangulum A D E F. $ax + xx$.

Similiter multiplico D B. $b - x$
per D B seu B G. $b - x$

$$\begin{array}{r} -bx + xx \\ bb - bx \\ \hline \end{array}$$

Et fit quadratum D B G H. $bb - 2bx + xx$.

Vnde talis exurgit æquatio
$ax + xx \infty bb - 2bx + xx$.

Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque $ax \infty bb - 2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte, & fit $ax + 2bx \infty bb$.

Cujus

Cujus utraque pars ſi dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \infty \frac{bb}{a + 2b}$. Hoc eſt, reſolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad ſecandam A B in D, qualis requiritur, producendam eſſe A B ad I, ita ut B I ſit æqualis B C; ac deinde ad A I & I B vel B C inveniendam eſſe 3^{tiam} proportionalem, hoc eſt, ut A I ſit ad I B vel B C, ſicut B C ad C D.

Vt autem pateat demonſtratio, repetantur Analyſeos veſtigia. Si enim per hæc ipſa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & deſinendo ubi illa initium ſumpſit, inventa ſimul erit via à dato ſeu conceſſo perveniendi ad quæſitum. In quem igitur finem binas ſequentes compoſitiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina eſt, ob oculos ponere viſum fuit, adhibitâ utriuſque calculi interpretatione ſive ad figuram relatione.

Compoſitio Algebraïca.

Finis *Compoſitionis.*

▭ A D, C D vel A D E F

[a] & fit $ax + xx \infty$

□ D B vel D B G H.

[b] $bb - 2bx + xx$.

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx,

▭ A C, C D

eritque[c] $ax \infty$

(□ D B — □ C D vel D K) i.e.[d], ▭ C B K

$bb - 2bx$.

▭ C I, C D vel[e] ▭ C D I + □ C D

Auferatur utrinque $2bx$,

▭ A I, C D □ I B vel B C

erit[f] $ax + 2bx \infty bb$.

Compoſitio Geometrica.

▭ A D, C D vel A D E F

Et fit, *per 3. 2di.* $ax + xx \infty$

□ D B vel D B G H.

$bb - 2bx + xx$. *per 6. 2di.* a *per 3 ſecundi.*

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx

▭ A C D ▭ C B K b *per 6 ſecundi.*

erit, *per 16. 6ti.* $ax \infty bb - 2bx$.

Id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem,

A C C B B K K D vel C D

ut a ad b, ita $b - 2x$ ad x. c *per 5 ſecundi.*

Et, ſumptis conſequentium ſemiſſibus, *vide Clavium ad 22 5ti.* d *per 1 ſecundi.*

A C C I B K K C

ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$. e *per 3 ſecundi.*

Vnde dividendo erit, *per 17 quinti.*

A I I C B C 2 C D vel C K

ut $a+2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$. f *per 17 ſexti.*

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, ſive, ſumptis conſequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

A I   I B   B C   C D

Ex conſtructione eſt, ut $a + 2\,b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compoſitionis*.

Adapertâ itaque tum ad Conſtructionem tum ad Demonſtrationem viâ, licebit Problema conſtruere atque dupliciter demonſtrare, ut ſequitur.

Conſtructio.

Productâ A B ad I, donec B I ſit æqualis B C, fiat ut A I ad I B vel B C, ita B C ad C D: dico rectangulum A D C ſeu A D E F quadrato D B ſeu D B G H æquale eſſe.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione A I ſit ad I B vel B C, ut B C ad C D: erit [g] rectangulum ſub extremis A I, C D, id eſt, [h] rectangulum ſub A C, C D unà cum rectangulo ſub C I, C D, æquale quadrato mediæ I B vel B C. A quibus ſi commune aufe-

g per 17 ſexti. h per 1 ſecundi.

ratur rectangulum ſub C I, C D: erit reliquum rectangulum ſub A C, C D æquale B C quadrato, dempto eidem rectangulo ſub C I, C D, id eſt, [i] rectangulo C D I unà cum quadrato C D. At cum dempto C D I rectangulo à quadrato C B vel B I [k] relinquatur quadratum D B: patet dictum rectangulum A C D quadrato D B æquale eſſe minus quadrato C D. Hinc cum, ſu-

i per 3 ſecundi. k per 5 ſecundi.

mendo

mendo CD & DK æquales, quadratum DB minus quadrato CD vel DK[l] æquale ſit rectangulo CBK: manifeſtum eſt, ſi æqualibus hiſce rectangulis ACD & CBK addatur commune quadratum CD vel DK, etiam totum toti æquale eſſe, id eſt, [m] rectangulum ADC ſeu ADEF ipſi DB quadrato ſeu DBGH. Quod erat faciendum.

l per 6 ſecundi.
m per 3 ſecundi.

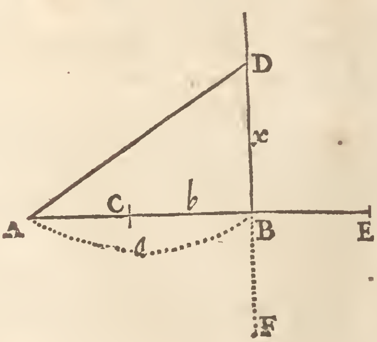
Vel ſic:

Cum ex conſtructione ſit ut AI ad IB, ita BC ad CD: erit quoque, ſumptis conſequentium duplis, [n] ut AI ad IC, ita BC ad 2 CD ſeu CK; & dividendo [o] ut AC ad CI, ita BK ad KC; id eſt, ſumptis conſequentium ſemiſſibus. [p] ut AC ad CB, ita BK ad KD vel CD. Æquale igitur eſt [q] rectangulum ſub extremis AC, CD rectangulo ſub mediis CB, BK. Quibus ſi addatur commune quadratum CD vel DK, erit & totum toti æquale, id eſt, [r] rectangulum ADC ſeu ADEF ipſi quadrato DB ſeu DBGH [s]. Quod erat faciendum.

n vide Clavium ad 22 quinti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q per 16 ſexti.
r per 3 ſecundi.
s per 6 ſecundi.

PROBLEMA.

Datâ rectâ AB utcunque ſectâ in C, erectâque ex ejus termino B ſuper ipſa perpendiculari indefinitâ BD: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere AD, huic occurrentem in D; ita ut ipſa æqualis ſit rectis DB, BC ſimul ſumptis.



Series *Analyſeos.*

Ponatur factum quod quæritur,

ſitque AB ∞ a

CB ∞ b

& BD ∞ x: eritque

AD ∞ $b+x$.

Hinc cum angulus ad B ſit rectus, erit [a] quadratum ex AD æquale binis quadratis ex AB & BD.

a per 47 primi.

 Vnde

Vnde talis resultat æquatio

$$\begin{array}{c} \square AD \quad \square AB + \square BD \\ bb + 2bx + xx \infty aa + xx. \end{array}$$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \infty aa - bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \infty \frac{aa-bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opùs tantùm esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^tam proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analysi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analysis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis *Compositionis*:

Vnde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt $\square$FD & $\square$AD.

b per 47 primi. c per 4 secundi. $\square FB + 2 \sqsubset\!\sqsupset FBD + \square BD$, vel $\square FD$ [b]. $\square AB + \square BD$, vel $\square AD$ [c].

Et fit $bb + 2bx + xx \infty aa + xx$.

$\square BD$

Rursus addatur utrinque xx,

d per 6 secundi. $\square FB + 2 \sqsubset\!\sqsupset FBD \quad \square AB$ [d].

eritque $bb + 2bx \infty aa$.

$\square FB$ vel BC

Addatur utrinque bb,

$\sqsubset\!\sqsupset$ CE, BD seu $2 \sqsubset\!\sqsupset$ FBD $\quad \sqsubset\!\sqsupset$ EAC.

e per 16. sexti. erit [e] $2bx \infty aa - bb$

id est,

id eſt, reductâ proportione ad æqualitatem, ſumptâque F B æquali B C,

CE AE AC BD
Ex conſtructione eſt ut 2 b ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compoſitionis*.

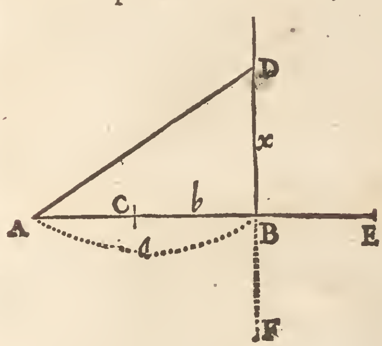
Inventâ igitur tum Conſtructione tum Compoſitione ſive Demonſtratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit inveſtigata, in hunc modum conſtrui atque componi.

Conſtructio.

Productâ A B ad E, ut B E ſit æqualis B C: fiat ut C E ad A E, ita A C ad B D, jungaturque A D. Dico hanc ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualem eſſe.

Demonſtratio.

Etenim productâ D B ad F, ita ut B F ſit æqualis B C, quoniam per conſtructionem C E eſt ad A E, ſicut A C ad B D: erit [f] rectangulum ſub extremis C E, B D, id eſt, duplum rectangulum F B D, æquale rectangulo ſub mediis E A, A C. Quibus ſi addatur commune quadratum ex F B vel B C, erit etiam quadratum F B unà cum duplo rectangulo F B D æquale quadrato ex A B [g]. Quibus ſi rurſus addatur commune quadratum ex B D: erunt quoque bina quadrata ex F B, B D ſimul cum duplo rectangulo F B D, id eſt [h], quadratum totius F D, æqualia binis quadratis ex A B, B D, id eſt [i], æquale quadrato ex A D. Vnde & ipſæ rectæ F D & A D æquales erunt. Hinc cum F D æqualis ſit ipſis D B, B C ſimul ſumptis, erit etiam A D ipſis D B, B C ſimul ſumptis æqualis. Quod erat faciendum.



f per 16 ſexti.

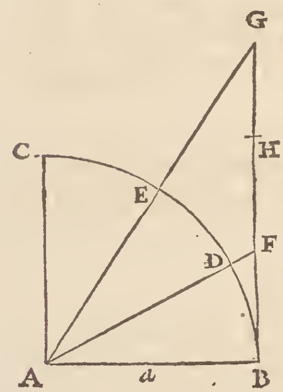
g per 6 ſecundi.

h per 4 ſecundi.

i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli A B C sumatur arcus quilibet B D minor quàm 45 gr. cujus duplus sit B E, eorumque tangentes B F, B G: erit ut quadratum radii A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B F ad B G.



Series *Analyseos.*

Esto A B $\propto a$
B F $\propto x$
B G $\propto y$, eritque F G $\propto y-x$
& A G $\propto z$.

Quoniam itaque arcus B E ipsius B D duplus ponitur, ac proinde angulus B A G duplus anguli B A F: erit angulus ad A in triangulo ABG rectâ A F bifariam sectus.

Vnde [a] erit
ut F G ad B F, ita A G ad A B

$$y-x \;\text{——}\; x \;\text{——}\; z \;/\; a.$$

a per 3 sexti.

Ideoque [b] $\Box$ B F, A G æquale $\Box^{lo}$ F G, A B

b per 16 sexti.

div. utrinque per x $\quad xz \propto ay-ax.$

fit $\quad z \propto \dfrac{ay-ax}{x}$

Hinc ductâ utrâque parte in se quadratè,

add. $\left\{\begin{array}{l}\Box \text{A B. } aa \\ \Box \text{B G. } yy\end{array}\right.$ $\Box$ A G, per 47 primi.

erit $zz \propto \dfrac{aayy-2aaxy+aaxx}{xx} \propto aa+yy \propto zz.$

mult. utrinque per xx $\quad aayy-2aaxy+aaxx \propto aaxx+xxyy$

toll. utrinque $aaxx$ $\quad aayy-2aaxy \propto xxyy$

div. utrinque per y $\quad aay-2aax \propto xxy$

add. utrinque $2aax$ $\quad aay \propto 2aax+xxy$

toll. utrinque xxy $\quad aay-xxy \propto 2aax$

div. utrinque per $aa-xx$

fit $y \propto \dfrac{2aax}{aa-xx}.$

$\Box$AB—$\Box$BF $\quad$ 2$\Box$AB $\quad$ BF $\quad$ BG

Hoc est, erit ut $aa-xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Vt proponebatur.

De-

Demonſtrationis ſeries eodem modo ſe habet quo Analyſeos, cum utriuſque veſtigia conſentiant, quibus ab hypotheſi ad quæſiti concluſionem perducimur. Vti hîc videre eſt.

Etenim cum [c] ſit *c per 3 ſexti.*
ut F G ad B F, ita A G ad A B:
$y - x$ —— x —— z / a

erit quoque [d] *d per 16 ſexti.*
ut $\square$ F G ad $\square$ B F, ita $\square$ A G ſeu $\square$ A B + $\square$ B G ad $\square$ A B
$yy - 2xy + xx$ —— xx —— zz, id eſt, $aa + yy$ / aa.

& dividendo [e] *e per 17 quinti.*
ut $\square$ F G — $\square$ B F vel F H,
id eſt, ▭ B G H [f] ad $\square$ B F, ita $\square$ B G ad $\square$ A B *f per 6 ſecundi.*
$yy - 2xy$ —— xx —— yy / aa.

permutandoque [g] *g per 16 quinti.*
ut ▭ B G H ad $\square$ B G, vel [h] ut H G ad G B, ita $\square$ B F ad $\square$ A B *h per 1 ſexti.*
$y - 2x$ —— y —— xx / aa.

Id eſt, invertendo & per converſionem rationis [i], *i per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.*
ut $\square$ A B ad $\square$ A B — $\square$ B F, ita G B ad B H
aa —— $aa - xx$ —— y / $2x$.

& duplatis antecedentibus [k] convertendoque *k vide Clavium ad 22 quinti.*
ut $\square$ A B — $\square$ B F ad 2 $\square$ A B, ita B H ad 2 G B ſeu B F ad B G [l]
$aa - xx$ —— $2aa$ —— x / y.
Quod erat oſtendendum. *l per 15 quinti.*

Quòd ſi autem Algebræ ignaris ſive in inveniendi arte imperitis ipſa demonſtratio ſit exhibenda, poterit ea prætermiſſis jam hiſce veſtigiis ſic adhiberi.

Sumatur F H æqualis F B. Cum igitur in triangulo A B G angulus ad A rectâ A F bifariam ſectus ſit, erit [m] ut F G ad B F, ita A G ad A B. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia ſint quadrata, erit & [n] ut quadratum F G ad quadratum B F, ita quadratum A G, id eſt, *per 47 primi*, ſumma quadratorum A B, B G, ad quadratum A B. Et dividendo [o] ut quadratum F G minus quadrato B F vel F H, id eſt [p] rectangulum B G H, ad quadratum B F, ita quadratum B G ad quadratum A B; permutandoque [q] ut rectangulum B G H ad quadratum B G ſeu [r] ut H G ad G B, ita quadratum B F ad quadratum A B. Hoc eſt, in-

m per 3 ſexti. *n per 22 ſexti.* *o per 17 quinti.* *p per 6 ſecundi.* *q per 16 quinti.* *r per 1 ſexti.*

s per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti. invertendo & per conversionem rationis[s], ut quadratum A B ad quadratum A B minus quadrato B F, ita G B ad B H; & duplatis antecedentibus[t] convertendoque, ut quadratum A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B H ad duplum ipsius G B seu[u] B F ad B G. Quod erat demonstrandum.

t vide Clavium ad 22 quinti. u per 15 quinti.

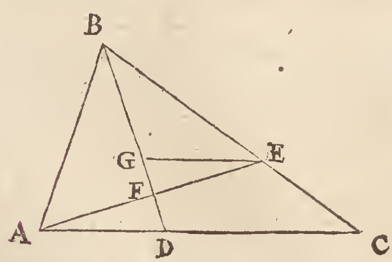
Hinc

„ Si, *Tangens cujuslibet arcûs minoris quàm 45 gr. ducatur in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc residuum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Ioanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

Theorema.

Si fuerit triangulum A B C, cujus angulus ad B rectâ B D bifariam sit divisus, & ex B C abscindatur B E æqualis A B, jungaturque A E, secans B D in F: dico, si agatur E G parallela A C, occurrens ipsi B D in G, esse ut B G ad B D, ita A D ad D C, & A B ad B C; nec non D C bis esse ad excessum; quo D C superat A D, sicut B D ad D F.



Series *Analyseos.*

Esto B D ∞ *b*
A D ∞ *c*
D C ∞ *y*
& D F ∞ *z*.

Quoniam itaque triangulorum A B F, E B F anguli ad B ex hypothesi sunt æquales, nec non latera A B, B F & E B, B F, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt &[a] anguli ad F æquales, id est recti, basis-

a per 4 primi.

basisque A F basi F E æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas A C, G E anguli D A F, F E G in triangulis A F D, F G E æquales sint, ut & [c] anguli ad verticem A F D & G F E, latusque A F lateri F E, ut ostensum est: erunt quoque [d] reliqua latera A D, D F reliquis lateribus E G, G F æqualia. Hinc cum [e] propter similitudinem triangulorum B G E, B D C, B G sit ad G E, id est, A D, sicut B D ad D C; nec non B G ad B E, id est A B sicut B D ad B C: erit quoque [f] permutando B G ad B D, sicut A D ad D C, & A B ad B C. Quod est primum.

b *per 29 primi.*
c *per 15 primi.*
d *per 26 primi.*
e *per Cor. 4 quinti.*
f *per 16 quinti.*

Cæterum D C bis esse ad excessum, quo D C superat A D, sicut B D ad D F: ita patet.

Est enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z$ —— b —— c / y.

Ideoque [g] $\square$ B G, D C ∞ $\square^{lo}$ B D, A D.

$by - 2yz \infty bc.$

add. utrinque $2yz$

$by \infty 2yz + bc$

toll. utrinque bc

$by - bc \infty 2yz$

div. utrinque per $2y$

fit $\frac{by - bc}{2y} \infty z$. Hoc est, erit ut

2 D C DC—AD BD DF

$2y$ ad $y - c$, ita b ad z. Quod est secundum.

g *per 16 sexti.*

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b - 2z$ —— b —— c / y.

erit invertendo [h]

ut D C ad A D, ita B D ad B G

y —— c —— b / $b - 2z$.

& per conversionem rationis [i]

ut D C ad D C — A D, ita B D ad D G

y —— $y - c$ —— b / $2z$.

id est, duplatis antecedentibus, [k]

ut 2 D C ad D C—AD, ita 2 BD ad DG seu B D ad DF

$2y$ —— $y - c$ —— b / z.

h *per Cor. 4 quinti.*
i *per Cor. 19 quinti.*
k *vide Clavium ad 22 quinti.*

Ex his facile eſt, cognitis A D, D B, & D C, invenire D F.

Si enim, exempli gratiâ, A D ſit 39, D B 45, & D C 325: fiat ut 2 D C 650 ad D C — A D 286, ita D B 45, ad DF $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iiſdem poſitis, dico rectangulum A D C unà cum quadrato D B æquale eſſe rectangulo A B C.

Series *Analyſeos*.

Eſto A B ∞ a
B D ∞ b
A D ∞ c
B C ∞ x
D C ∞ y
& D F ∞ z.

a per 13 ſecundi.

Etenim cum [a] 2 ▭ B D F ſit ∞ □ A D + □ D B — □ A B,
id eſt, $2bz \infty cc + bb - aa$:

erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \infty \frac{cc+bb-aa}{2b}$.

Vnde cum per antec. Theorema inventum quoq; ſit $\frac{by-bc}{2y} \infty z$:

erit $\frac{cc+bb-aa}{b} \infty \frac{by-bc}{y}$

diviſo utroque denominatore per 2, inſtituatur multiplicatio per crucem

$ccy + bby - aay \infty bby - bbc$

add. utrinque aay

$ccy + bby \infty aay + bby - bbc$

toll. utrinque bby

$ccy \infty aay - bbc$

add. utrinque bbc

$ccy + bbc \infty aay$

loco ay ſubſtit. cx

$ccy + bbc \infty acx$

div. utrinque per c

▭ADC + □DB ▭ABC

Et fit $cy + bb \infty ax$. Quod erat propoſitum.

Ex demonſtratis in antec. Theoremate vel 3[tia] *Sexti* eſt ut AD ad DC, ita AB ad BC
c —— y —— a / x.
ac proinde *per 16 ſexti*
▭AD, B C ∞ ▭AB, DC
$cx \infty ay$.

Quo autem pacto in adæquatione hac reſolvenda argumentandum ſit, ut ſequendo veſtigia allatæ reductionis, quæ ob ſuperiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca eſt,

quæ-

quæsitum Theorematis Geometricè concludatur, sequens terminorum dispositio docebit.

Ex præcedenti Theoremate est

ut 2 D C ad D C — A D, ita B D ad D F

$2y$ ——— $y - c$ ——— b / z.

ac proinde[b] 2 ▭ C D F æqual. ▭ B D C — ▭ A D B — b per 16 sexti.

α $2yz$ ∞ $by - bc$.

Deinde[c] est, ut B D ad D C, ita 2 ▭ B D F ad 2 ▭ C D F. as- — c per 1 sexti.

b ——— y ——— $2bz$ / $2yz$.

sumptâ sc. com. alt. 2 D F, id est, 2 z.

Hinc cum[d] — d per 13 secundi.

2▭BDF æqu.□AD+□DB--□AB, & α2▭CDF æqu.▭BDC--▭ADB:

$2bz$ ∞ $cc + bb - aa$, & $2yz$ ∞ $by - bc$:

erit ut B D ad D C, seu[e] □ B D ad ▭ B D C, — e assumptâ com. altit. B D, id est, b.

bb ——— by

ita □AD+□DB—□AB ad ▭BDC—▭ADB.

$cc + bb - aa$ ——— $by - bc$

ideoque[f] — f per 19 quinti.

& reliq. □AB—□AD ad rel. ▭ADB, ut totum ad totum seu BD ad D C.

$aa - cc$ ——— bc ——— b / y.

Facile hîc esset quæsitum Propositionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum a y substituendo c x. Sed quoniam sic ad solida ascenditur, de quibus in posterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem suam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addisci solent, poterimus iisdem sepositis in quæsiti conclusionem sic ulteriùs argumentari.

Sed ut B D est ad D C, ita quoque est[g] ▭ A D B ad ▭ A D C; — g assumptâ com. altit. A D seu c.

b ——— y ——— bc / cy;

& ut B D ad A D, ita quoque est[h] ▭ ADB ad □AD; &[i], — h assumptâ com. altit. A D seu c.

b ——— c ——— bc / cc

□ B D ad ▭ A D B seu bb ad bc. — i assumptâ com. altit. B D seu b

 Erunt

Erunt itaque □AB -- □AD, ▭ADB, & □AD tres magnitudines
$aa - cc$ —— bc .... cc ab una parte;
& □BD, ▭ADB, & ▭ADC tres aliæ ab altera
bb .... bc —— cy parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k per 23 quinti.

quare etiam ex æqualitate proportionales erunt,[k]
id est, □AB — □AD ad □AD, sicut □BD ad ▭ADC.
$aa - cc$ —— cc —— bb / cy.

l per 18 quinti.

Et componendo[l].
□AB ad □AD, sicut □BD + ▭ADC ad ▭ADC
aa —— cc —— $bb + cy$ / cy.

m per 16 quinti.

Permutandoque[m]
□AB ad □BD + ▭ADC, sicut □AD ad ▭ADC seu
aa —— $bb + cy$ —— cc / cy.
AD ad DC, id est, c ad y.[n]

n per 1 sexti. relictâ sc. com. altit. AD seu c.

Sed ut AD ad DC, ita[o] est quoque AB ad BC, seu[p], □AB
c —— y —— a / x.
ad ▭ABC, id est, aa ad ax.

o per antec. Theorema vel 3 sexti.

Vnde erit ut □AB ad □BD + ▭ADC, ita □AB ad ▭ABC.
aa —— $bb + cy$ —— aa / ax.

p assumptâ com. altit. AB seu a.

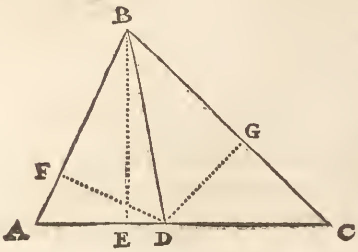
Æqualia igitur sunt[q] □BD + ▭ADC & ▭ABC.
$bb + cy \propto ax$. Quod erat ostendendum.

q per 9 quinti.

Idem quoque aliter à nobis demonstratum reperitur Prop^ne 20^mâ secundæ partis prioris tractatus Exercitationum nostrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantùm 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super A B, B C, perpendicularibus D F, D G, patet, ob angulum A B C rectâ B D bifariam divisum, ipsas D F & D G, ut & F B & B G *per 16 primi* esse æquales. Deinde esto etiam B E perpendicularis ad A C, sitque
A B ꝏ a
B D ꝏ b
A D ꝏ c
B C ꝏ x
D C ꝏ y
F B vel B G ꝏ t, eritque A F ꝏ $a - t$,
& G C ꝏ $x - t$.
& E D ꝏ v, eritque A E ꝏ $c - v$,
& E C ꝏ $y + v$.

per 47 primi.

Subtr. $\left\{\begin{array}{l} \square \text{AD}.\ cc \\ \square \text{AF}.\ aa - 2at + tt \end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{l} bb.\ \square \text{BD} \\ tt.\ \square \text{FB} \end{array}\right.$

$\square$FD. $cc - aa + 2at - tt$ ꝏ $bb - tt$. $\square$FD

dele utrinque tt, & transfer cc & aa

$2\,\square$ABF $\quad \square$AB $+ \square$BD $- \square$AD
$2at$ ꝏ $aa + bb - cc$ *

div. utrinque per $2a$

fit t ꝏ $\dfrac{aa + bb - cc}{2a}$.

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam per 3 latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}\square DC.\ yy\\ \square GC.\ xx - 2xt + tt\end{array}\right. \qquad \text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD\\ tt.\ \square BG\end{array}\right.$$

$$\square DG.\ yy - xx + 2xt - tt \;\infty\; bb - tt.\ \square DG$$

del. utrinque tt, & transf. yy & xx

$$2\,\square CBG \quad \square BC + \square BD - \square DC.$$

$$2xt \;\infty\; xx + bb - yy\ *$$

div. utrinque per $2x$

$$\text{fit } t \;\infty\; \frac{xx + bb - yy}{2x}.$$

Sive igitur quæratur t per 3^a latera $\triangle^{li}$ A B D, sive per 3^a latera $\triangle^{li}$ D B C, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad F B vel B G inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{aa + bb - cc}{a} \;\infty\; \frac{xx + bb - yy}{x}.$$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt ab una parte habeantur

$$aax + bbx - ccx \;\infty\; axx + abb - ayy$$

$$bbx - abb \;\infty\; axx - ayy + ccx - aax$$

div. utrinque per $x - a$

$$\text{eritque } bb \;\infty\; \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}.$$

Quæratur jam v per 3^a latera trianguli A B D

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}\square AB.\ aa\\ \square AE.\ cc - 2cv + vv\end{array}\right. \qquad \text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD\\ vv.\ \square ED\end{array}\right.$$

$$\square EB.\ aa - cc + 2cv - vv \;\infty\; bb - vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$$2cv \;\infty\; bb + cc - aa$$

div. utrinque per $2c$

$$\text{fit } v \;\infty\; \frac{bb + cc - aa}{2c}.$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3^a latera trianguli D B C, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi

Subtr. $\left\{\begin{array}{l}\square BD.bb \\ \square ED.vv\end{array}\right.$ Subtr. $\left\{\begin{array}{r}xx.\square BC \\ yy+2yv+vv.\square EC\end{array}\right.$

$\square EB.\ bb-vv \propto xx-yy-2yv-vv.\square EB$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$ — $2\square CDE$. $\square BC-\square DC-\square BD$

div. urinque per $2y$ — $2yv \propto xx-yy-bb$ †

fit $v \propto \frac{xx-yy-bb}{2y}$

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle^{li}$ D B C, emanat hinc Prop. 12 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa debeat adhiberi ut inveniatur E D.

Quare erit

$$\frac{bb+cc-aa}{c} \propto \frac{xx-yy-bb}{y}$$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem — $bby+ccy-aay \propto cxx-cyy-cbb$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur — $bby+cbb \propto cxx+aay-cyy-ccy$

div. utrinque per $y+c$ — & fit $bb \propto \frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}$.

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio inter $\frac{axx-ayy+ccx-aax}{x-a}$ & $\frac{cxx+aay-cyy-ccy}{y+c}$.

mult. per crucem

$$axxy-ay^3+ccxy-aaxy+acxx-acyy+c^3x-aacx$$
$$\propto$$
$$cx^3+aaxy-cxyy-ccxy-acxx-a^3y+acyy+accy$$

transpositis transponendis, fit

$$2acxx+cxyy+c^3x-cx^3-aacx+2ccxy$$
$$\propto$$
$$2aaxy+ay^3+accy-axxy-a^3y+2acyy$$

div. utrinque per $2ax+yy+cc-xx-aa+2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \propto ay$. Hoc est, erit ut c ad y, ita a ad x.

ac proinde $x \propto \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \propto y$. Quæ tertia est Propositio libri sexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \infty \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

□ADC+□DB □ABC

id est, $bb \infty ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \infty ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Vnde facile est, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quòd si autem, existente $bb \infty ax - cy$. pro x scribatur $\frac{ay}{c}$ fiet $bb \infty \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \infty aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \infty y$. Vel, resolvendo æqua-

□AB—□AD □BD AD DC

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \infty ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \infty aax - ccx$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \infty x$. Vel,

□AB—□AD

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad

□BD AB BC

bb, ita a ad x. Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus $\triangle^{li}$ ABD inveniri possint BC & DC.

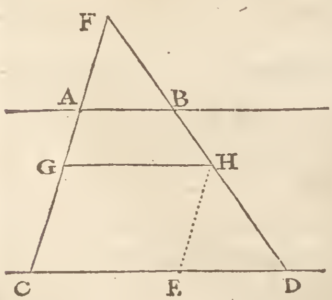
Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet, verùm etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3^tia sexti, aliæque propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

Cæterum calculum hunc multò prolixiorem esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum suppofuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem

rem ipsam penitiùs inspicere atque à primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectandæ. Quæ quidem hîc refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quòd solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim, quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis AB, CD, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere FBD, quæ à positione datis abscindat rectas AB, ED, datam inter se rationem habentes AF ad CG, seu a ad d.



Series *Resolutionis.*

Ponatur factum, quod quæritur, hoc est, sit AB ad ED, ut a ad d, sitque AF ∞ a
CF ∞ b
CE ∞ c
& AB ∞ x.

Hinc ut A F ad C G, ita A B ad 4^{tam} seu E D

$$a \text{ —— } d \text{ —— } x \;/\; \frac{dx}{a}$$

Sed ex similitudine $\triangle^{lorum}$ A F B & C F D est quoque

ut A F ad A B, ita C F $\overline{\text{add. C E. } c}$

$$a \text{ —— } x \text{ —— } b \,/\, \text{ad C D.} \; c + \frac{dx}{a}$$

Quare erit *per 16 sexti* $\square$ A F, C D $\square$ A B, C F

$$ac + dx \;\infty\; bx.$$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

eritque $ac \;\infty\; bx - dx$.

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \;\infty\; \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut G F ad C E, ita A F ad A B. Vt autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superiùs jam sæpiùs monstratum fuit, atque etiam hîc videre est, præmittendo priùs Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ G H parallelâ A B vel C D ac æquali C E, agatur ex F per H recta F H D, secans A B, C D in B & D: dico A B ad E D esse, sicut A F ad C G, seu a ad d.

Finis *Compositionis.*

A F C G A B E D.

Vnde *per 16 sexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

$\square$ A F, E D $\square$ C G, A B

erit similiter $af \;\infty\; dx$.

$\square$ A F, C E

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

▭AF,CE+▭AF,ED ▭AF,CE+▭CG,AB.
Quare erit etiam *a c* + *a f* ∞ *a c* + *d x*.

▭CF, AB ▭AF,CE+▭CG,AB.
Erat autem & *b x* ∞ *a c* + *d x*.

▭CF,AB ▭AF,CD,seu,▭AF,CE+▭AF,ED.
Quare *per 16 sexti* erit *b x* ∞ *a c* + *a f*.

AF AB CF CD
eritque ex similitudine △lorum AFB, & CFD, ut *a* ad *x*, ita *b* ad *c* + *f*.

Esto jam E D ∞ *f*,

▭CF,AB ▭AF,CE+▭CG,AB.
eritque *b x* ∞ *a c* + *d x*.

▭CG,AB
Addatur utrinque *d x*,

▭GF,AB seu ▭CF,AB—▭CG,AB ▭AF,CE.
erit *per 16 sexti* *b x* — *d x* ∞ *a c*

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB
Ex constructione est, ut *b* — *d* ad *c*, ita *a* ad *x*:

Principium *Compositionis*.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstructa erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione G F est ad G H vel C E, sicut A F ad A B : erit [a] rectangulum sub extremis G F, A B *a per 16*
æquale rectangulo sub mediis A F, C E. Quibus si addatur com- *sexti.*
mune rectangulum sub C G, A B, erit [b] rectangulum sub tota *b per 1 se-*
C F & A B æquale duobus rectangulis sub A F, C E & sub C G, *cundi.*
A B. Porrò, quoniam ex similitudine triangulorum A F B & C F D, A F est ad A B, sicut C F ad C D : erit [c] rectangulum *c per 16*
sub mediis C F, A B æquale rectangulo sub extremis, A F, C D. *sexti.*
hoc est, [d] æquale duobus rectangulis sub A F, C E & sub A F, *d per 1 se-*
E D. Erat autem quoque rectangulum sub C F, A B æquale duo- *cundi.*

 bus

bus rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub A F, C E & sub A F, E D binis rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. A quibus si commune auferatur rectangulum sub A F, C E, erit etiam reliquum rectangulum sub A F, E D æquale reliquo rectangulo sub C G, A B. Vnde [e] ut A F ad C G, ita A B ad E D. Quod erat faciendum.

e per 16 sexti.

Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censeri possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potiùs quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hæc secundùm certas regulas reducatur resolvaturque, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterque per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraïcam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita, ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

QVÆSTIO.

Quæstio 44 primæ partis libri primi Exercita-

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 stufris, alterius 14 stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem face-

facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat? *tionem nostrarum Mathematicarum.*

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a, & y cantharos secundi 14 stufr. seu b.

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c, & pretium 35 flor. vel 700 stufrorum, quo ipsum vendi debet, vocari d: erit $x + y \infty c$

& $x \infty c - y$.

Quæratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.

1 —— a —— x / facit ax. constant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.

1 —— b —— y / facit by. constant canthari secundi vini, in dolium infundendi

—— stufr.

eritque summa $ax + by \infty d$.

transf. by in alt. part.

$ax \infty d - by$

divid. utrinque per a

fit $x \infty \frac{d - by}{a}$.

Erat autem & $x \infty c - y$.

Quare erit $c - y \infty \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a

$ac - ay \infty d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem $by - ay \infty d - ac$

div. utrinque per $b - a$

& fit $y \infty \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

 Quæ-

Quæstione hâc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. c. 80 Canth. seu, dolium
per a. 8 stufr.

fiunt ac. 640 stufr. constat dolium plenum vino 8 stufrorum. . . . .

Subtr.
Ex d. 700 stufr. constat dolium plenum vino 8 & 14 stufrorum
ac. 640 stufr.
Relinq. $d - ac$. 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stufr. & 14 stufrorum, quàm plenum solo vino 8 stufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 stufrorum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stufrorum, illorum loco sumptis.

Ex b. 14 stufr.
subtr. a. 8

$b - a$. 6 stufr. differentia pretii unius canthari — 1 — Canth. — $d - ac$. 60 stufr. differentia pretii cantharorum in dolio / facit $\frac{1d - 1ac}{b - a}$ seu 10 canth. 14 stufrorum ∞ y

subtr.
c. 80 Canth. dolii
rel. $c - y$. 70 canth. 8 stufrorum ∞ x.

Qvæstio.

Quæstio 46 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriusque fructus 100 seu a simul pro $9\frac{1}{2}$ stufr. seu b habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu c offerantur 1 stufro seu d, & 25 pira seu e stufris 2 seu f, quæratur quanti jam constent assumpta x poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Poma ſtufr.

c —— d ———— x / facit $\frac{dx}{c}$. conſtant poma ſumenda

Pira *conſtant* ſtufr., *quanti conſtabunt* Pira

e —— f ———— $a - x$ / facit. $\frac{fa - fx}{e}$. conſtant pira ſumenda

$$\text{eritque ſumma } \frac{dex + cfa - cfx}{ce} \infty b. \text{ ſtufr.}$$

mult. utrinque per ce

$$dex + cfa - cfx \infty cbe$$

transf. cfa ad alt. partem

$$dex - cfx \infty cbe - cfa$$

div. utrinque per $de - cf$

$$\&\text{ fit } x \infty \frac{cbe - cfa}{de - cf}.$$

Ad fractionis hujus reſolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Vnde pro $x \infty \frac{cbe - cfa}{de - cf}$ ſcribi poterit $x \infty \frac{cbe - cfa}{cg - cf}$ vel $\frac{be - fa}{g - f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be - fa}{g - f}$ ſcribi poſſit $x \infty \frac{be - eh}{g - f}$. Hinc ſi demum fiat, ut $g - f$ ad e, ita $b - h$ ad 4^{tam}, erit ea ∞x, quantitati quæſitæ ſumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæſtionis ſolutionem citra Algebram ſequenti modo argumentandum eſſe inferunt

Poma ſtufr. Poma

c d e g

10 —— 1 —— 25 / facit $2\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 25 Poma.
ſubtr. f. 2 ſtufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $\overline{g - f}$. $\frac{1}{2}$ ſtufr. quo 25 poma cariora ſunt 25 piris.

Pira ſtufr. Pira Subtr.

e f a b. $9\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 100 poma & pira ſimul.

25 —— 2 —— 100 / facit h. 8 ſtufr. conſtant 100 pira

relinq. $\overline{b - h}$. $1\frac{1}{2}$ ſtufri, quibus 100 poma & pira ſimul cariora ſunt 100 piris, vel etiam,

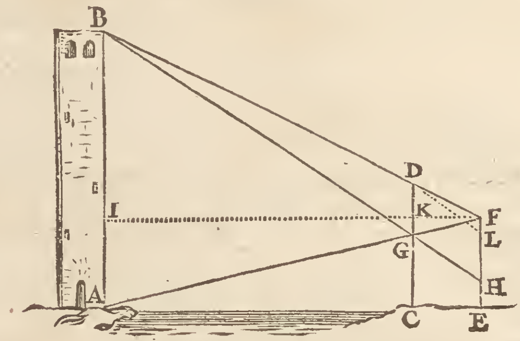
qui-

quibus poma in centenario contenta cariora ſunt piris eorum loco ſumptis.

ſtufr. differ.	Poma	ſtufr. differ.	Subtr.
$g - f$	e	$b - h$	a. 100
$\frac{1}{2}$ ———	25 ———	$1\frac{1}{2}$ /	facit x. 75 poma
			& $a - x$. 25 pira.

PROBLEMA.

Metiri altitudinem turris A B, ut & diſtantiam A C, beneficio duorum baculorum C D, E F, datis G D $\infty\, a$, C E $\infty\, b$, & H F $\infty\, c$.



Eſto A C $\infty\, x$,
& A B $\infty\, y$.

Series *Analyſeos*.

Ductâ I F parallelâ A E, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ A B F & G D F

ut A B ad I F vel A E, ita G D ad K F vel C E.

y ——— $x + b$ ——— a / b.

Ac proinde per 1 ſexti

$by \infty\, ax + ab$.

Eodem modo, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ B D G & B F H

ut B D ad B F, ſive I K ad I F

hoc eſt, A C ad A E, ita G D ad H F.

x ——— $x + b$ ——— a / c.

Adeo-

Adeoque per 16 sexti

$$cx \propto ax + ab.$$

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \propto ab.$

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \propto \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Iam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia erit $by \propto cx$. Hoc est, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod si autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \propto \frac{abc}{c-a}$.

Vbi, si utrinque dividatur per b, invenietur $y \propto \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ H L æquali G D, junctaque D K, fiat ut $c - a$ ad a, hoc est, ut F L ad L H, sive F D ad D B, sive etiam F G ad G A, ita E C seu b ad C A seu x; & ita quoque F H seu c ad A B seu y.

Cujus demonstratio ex 2^{da} & 4^{ta} sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam D L ipsi B H parallelam secare proportionaliter rectas B F, F H, perinde ac D C, quæ ipsi A B est parallela, secat rectas A F, A E; ut & rectam F E eidem A B parallelam, facientem $\triangle^{la}$ similia G F H & G A B.

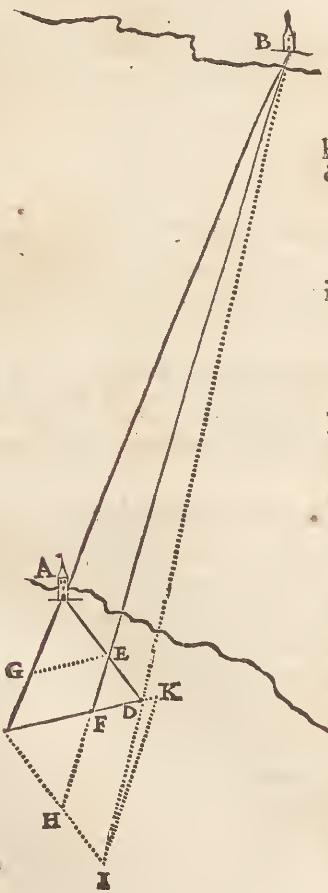
Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

			digit.
Esto	G D	$\propto a \propto$	24
	C E	$\propto b \propto$	30
&	H F	$\propto c \propto$	25

Vt F L ad L H
seu F D ad D B,
sive etiam F G ad G A,
$1 \text{——} 24$, ita $\left\{ \begin{array}{l} \text{E C. } 30 \\ \text{F H. } 25 \end{array} \right\}$ ad $\left\{ \begin{array}{l} \text{C A. } 720. \\ \text{A B. } 600. \end{array} \right.$ digit.

PROBLEMA.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis C A ∞ a, A D ∞ b, C D ∞ c, A E ∞ d, & C F ∞ e.



Esto A B ∞ x.

Series *Analyseos*.

Ductâ G E parallelâ C D, fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ A D C & A E G,

ut A D ad D C, ita A E ad E G

b —— c —— d / $\frac{cd}{b}$:

itemque

ut A D ad A C, ita A E ad A G.

b —— a —— d / $\frac{a}{b}$.

Hinc propter similia $\triangle^{la}$ C B F & G B E erit ut

C F ad C B, ita G E add. A B. x

e — $a + x$ — $\frac{cd}{b}$ / ad G B. $\frac{ad + bx}{b}$

Ac proinde per 16 sexti erit

▭ C F, G B æquale ▭ C B, G E

$$\frac{ade + bex}{b} \infty \frac{acd + cdx}{b}.$$

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade + bex \infty acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ ſunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

$$\text{fietque } bex - cdx \propto acd - ade.$$

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

$$\text{eritque } x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}.$$

Iam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem reſolvatur, ſimulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæſitam lineam A B ſeu x ex datis quàm breviſſimè inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hiſce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur eſſe d, ipſaque ſe ter prodat, ubi reliquæ non niſi bis offenduntur, faciendum eſt, ad deprimendas dimenſiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem ſi fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$ ſeu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Vbi ſi demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam}: erit ipſa $\propto x$, hoc eſt, $\propto$ quæſitæ lineæ A B. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium ſeu proportionum inveniri poſſe, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus inveſtiganda foret, ſi nullum in reſolvenda hac fractione fieret diſcrimen.

Vbi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas eſſe reſolubilem, quæ ſingulæ ſicut præcedentes non præter unam dimenſionem agnoſcunt ſive omnino ſimplices exiſtunt. Nimirum conſiderando in duobus terminis reperiri cd, & in ſingulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, ſi planum cd in aliud tranſmutetur, cujus unum latus ſit e, litera e ſic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti poſſit. Ac proinde ſi ſtatuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ ſcribi poſſit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Vnde ſi rurſus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea $\propto x$, lineæ quæſitæ A B. Quæ quidem animadverſio, cum in abſtracto fiat nullâ factâ calculi relatione ſive reſtrictione ad figuræ lineas, luculenter oſtendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perſpicientes hujus Geometriæ Metho-

 dum

dum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixiùs explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsiti finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b, hoc est, ut A E ad A D sive C H ad C I, ita C F seu e ad C K seu f. Deinde fiat ut $f-c$ ad $c-e$, hoc est, ut K D ad D F sive I D ad D B, ita C A seu a ad A B seu x.

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hîc exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cùm præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Vnde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundùm superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

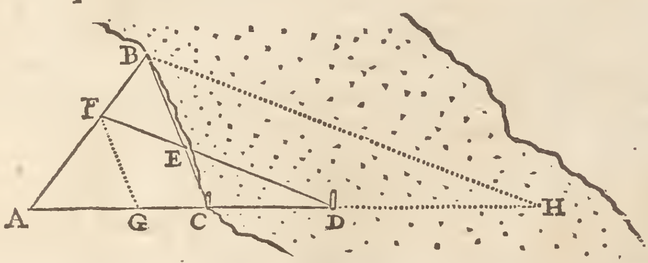
Esto

pedum
Esto CA ∞ a ∞ 450
AD ∞ b ∞ 390
CD ∞ c ∞ 420
AE ∞ d ∞ 225
& CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
Vt AE ad AD,
sive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{5}$
CD. 420
subtr. CD. 420 subtr. CF. 252 ped.
Deinde, ut DK. $16\frac{4}{5}$ ad FD. 168, ita CA. 450 / ad AB. 4500.
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos.*

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG

a —— b —— x / $\frac{bx}{a}$.

 Item-

Itemque

ut A B ad A C, ita A F ad A G   A C   G C

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$. quæ ſubducta ex c, relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.

Hinc propter ſimilia $\triangle^{la}$ C E D & G F D

erit

ut E C ad C D, ita F G   add. C D. d

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad G D. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per. 16 ſexti

$\square$E C, G D $\square$CD, FG

$$\frac{dae+cae-cex}{a} \infty \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae+cae-cex \infty dbx$$

add. utrinque cex

$$dae+cae \infty dbx+cex$$

div. utrinque per $db+ce$

& fit $\frac{dae+cae}{db+ce} \infty x$.

Ad reſolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4^tam^, quæ vocetur f: eritque $fe \infty db$, adeoque $x \infty \frac{dae+cae}{fe+ce}$ ſeu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a, ita $d+c$ ad x. Quod ipſum docet, ut ex datis lineis inveſtigetur quæſita linea A F, ducendam eſſe ex B lineam B H ipſi F E D parallelam, donec occurrat productæ A C D in H. Cum enim ſtatuendum ſit ut e ad d, hoc eſt, ut C E ad C D, ita b ſeu C B ad 4^tam^ f: patet hanc fore ipſam C H. Ac proinde ſi porrò fiat ut $f+c$ ad a, hoc eſt, ut A H ad A B, ita $d+c$ ſeu A D ad x: manifeſtum eſt inveniri hinc quantitatem quæſitæ lineæ A F; ita ut hîc ſicut in duobus præcedentibus Problematis demonſtratio ex ſola proportionalium applicatione per ſe perſpicua ſit.

Quòd ſi autem quis alio operandi modo aut etiam eodem ſed aliarum linearum ductu quæſitam lineam A F invenire deſideret, obſervare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata ſunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliiſve, non parvi uſus exiſtat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludoſis à certo

puncto

punćto ceu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hîc explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius A C à C usque ad D definiendà esse recta C D, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque A B C, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur A B, B C, A C, & C E, sitque, ex. gr., A B ∞ *a* ∞ 15, B C ∞ *b* ∞ 13, A C ∞ *c* ∞ 14, & C E ∞ *e* ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ C D ∞ *d* ∞ 10 quærere longitudinem lineæ A F, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

```
CE     CD     CB                          Add.
5 —— 10 —— 13 / ad C H. 26                A C. 14.
           add. A C. 14      A B.         C D. 10
                  A H. 40 —— 15 —— A D. 24 / ad A F. 9.
```

Hinc si ab A versùs B in recta A B mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius A C progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius F E, recta C D tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura. qualis requirebatur.

Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adéat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

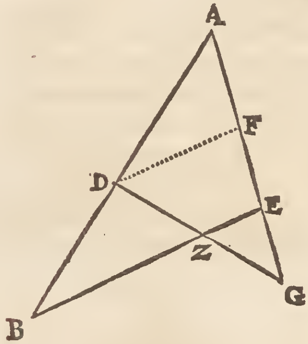
PROBLEMA,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata 11

In rectas A B, A G ductis utcunque rectis B E, D G, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio G D ad D Z,

ut

ut a ad b, nec non ratio Z B ad B E, ut c ad d: oporteatque invenire rationem G A ad A E.



Series *Analyseos.*

Esto G D $\infty\, a$
D Z $\infty\, b$, eritque Z G $\infty\, a - b$
B Z $\infty\, c$
B E $\infty\, d$, eritque Z E $\infty\, d - c$
A G $\infty\, x$
& A E $\infty\, y$, eritque E G $\infty\, x - y$.

Ductâ D F parallelâ B E, erit per 2 sexti

ut G Z ad Z D, ita G E Ex A E. y

$a - b$ —— b —— $x - y$ / ad E F. $\dfrac{bx - by}{a - b}$ } subtr.

rel. A F. $\dfrac{ay - bx}{a - b}$.

Tum fiat propter similia $\triangle^{la}$ G Z E & G D F

ut G Z ad Z E, ita G D / ad D F. $\dfrac{ad - ac}{a - b}$.

$a - b$ — $d - c$ —— a

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine $\triangle^{lorum}$ D A F & B A E

ut D F ad A F, ita B E ad A E

$\dfrac{ad - ac}{a - b}$ — $\dfrac{ay - bx}{a - b}$ —— d / y

Et fit per 16 sexti

$$\frac{ady - acy}{a - b} \infty \frac{ady - bdx}{a - b}.$$

Hoc est, omisso communi denominatore $a - b$
erit $ady - acy \infty ady - bdx$.

Vnde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde translatis, ut signo + adficiantur
habebitur $bdx \infty acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur
ut x ad y, ita ac ad bd.

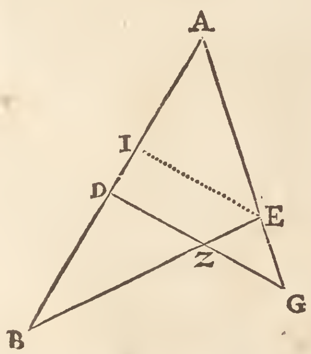
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam G A ad A E seu x ad y esse compositam ex ratione G D ad D Z seu a ad b, & ex ratione Z B ad B E seu c ad d, id est, rationem G A ad A E per 23 sexti esse eandem, quàm rectanguli sub G D, B Z seu ac ad rectangulum sub B E, D Z seu bd. Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

In duas rectas lineas A B & A G deductæ duæ rectæ lineæ B E & G D secent se mutuò in puncto Z. Dico quòd ratio G A ad A E composita est ex ratione G D ad D Z, & ex ratione Z B ad B E.

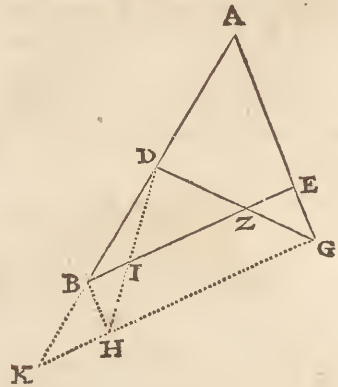
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipsius G A ad A E, utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulteriùs hîc ostendam, quibus datis lineis hæc quæsita ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem si inventa ratio ac ad bd ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsita ratio in simplicissimis terminis.



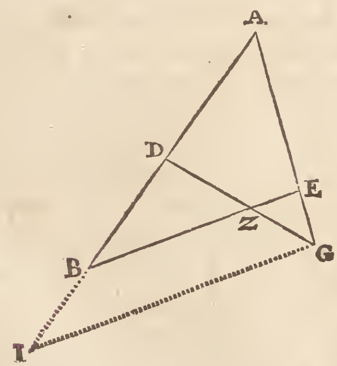
Etenim assumendo communem altitudinem c, si fiat ut c ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur e: erit $ce \propto bd$, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ ac ad ce, hoc est, rejectâ communi altitudine c, ut a ad e. Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est E I parallela ipsi G D. Si enim in ea fiat ut c ad d, id est, ut Z B ad B E, ita D Z seu b ad 4^{tam} e, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I seu a ad e quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius G A ad A E. Vt patet ex 4^{ta} sexti, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E.

Sic etiam assumendo communem altitudinem a, si fiat ut a ad b,



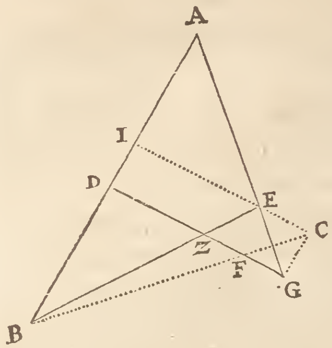
hoc eſt, ut D G ad D Z, ita H G vel B E ſeu d ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit ea ∞ Z I. Et ſit af ∞ bd, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ ac ad af, hoc eſt, rejectâ a communi altitudine, eadem quæ c ad f ſeu B Z ad Z I. Hanc autem eandem eſſe, quam ipſius G A ad A E, ita patet.

Productis namque A B, G H donec coëant in K, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B D Z, K D G, lineamque D H ſimiliter in utroque ductam, ut B Z ad Z I, ita K G ad G H ſeu B E. Vt autem K G ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ K A G & B A E, quoque G A ad A E. Quare etiam B Z ad Z I erit, ut G A ad A E. Vnde liquet, ſi a pro communi altitudine ſumatur, ducendam eſſe ex G rectam G H ipſi B E parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipſi A G parallelæ in H: eritque, junctâ H D, B Z ad Z I ratio quæſita.



Haud ſecus, ſi aſſumatur communis altitudo b, fiatque ut b ad a, hoc eſt, ut Z D ad D G, ita B Z ſeu c ad 4^{tam}., quæ vocetur g: erit ea ∞ I G. Et ſit bg ∞ ac, ita ut quæſita ratio G A ad A E eadem ſit, quæ bg ad bd, hoc eſt, rejectâ communi altitudine b, eadem quæ g ad d ſeu I G ad B E. ut patet ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ I A G & B A E. Quod ipſum arguit, ſumendo b pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G I ipſi B E parallelam, donec occurrat productæ A B in I, ut habeatur ratio quæſita I G ad B E.

Nec

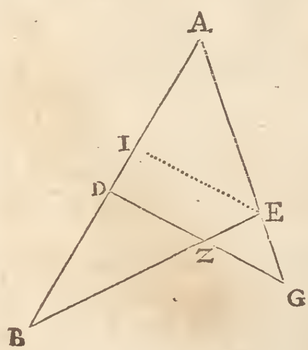


Nec aliter fit, si, assumptâ communi altitudine d, fiat ut d ad c, hoc est, ut B E ad B Z, ita G D vel I C seu a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: erit ea ∞ D F. Et fit $dh \infty ac$, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ dh ad bd, hoc est, rejectâ communi altitudine d, eadem quæ h ad b seu D F ad D Z.

Hanc autem eandem esse, quam G A ad A E, ita patet.

Est enim, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B D F & B I C, lineamque B E in utroque similiter ductam, ut D F ad D Z ita C I seu D G ad I E. Vt autem D G ad I E, ita est, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E, G A ad A E. Quocirca & D F ad D Z erit, ut G A ad A E. Atque ita liquet, sumendo d pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam G C ipsi B A parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi D G parallelæ in C, rationem quæsitam esse D F ad D Z.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hîc subjungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hîc adhibere atque patefacere.



Vt supra est
ZB BE DZ IE
c——d——b / e
& $ce \infty bd$.

Ratio
GA ad AE
ac .... bd
vel ac .... ce
seu GD EI
a .... e

DZ BE
med.term. b d.
ZB
c

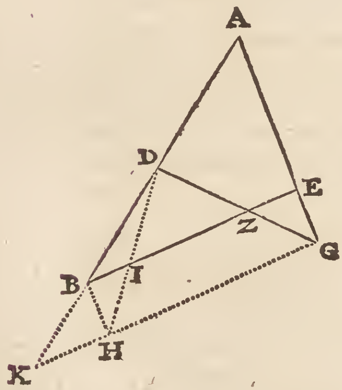
De-

Demonſtratio PTOLEMÆI.

„ *Ducatur enim per punctum E linea E I æquidiſtans* „ *lineæ G D.*

„ *Quoniam igitur lineæ G D & E I ſunt æquidiſtantes,* „ *ratio lineæ G A ad A E eadem eſt, quæ eſt lineæ G D ad* „ *lineam E I. Adſumatur autem deforis linea Z D. Erit* „ *igitur compoſita ratio lineæ G D ad lineam E I ex ratio-* „ *ne lineæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ D Z ad* „ *lineam E I. Quare & ratio lineæ G A ad lineam A E* „ *compoſita eſt ex ratione lineæ G D ad lineam D Z, & ex* „ *ratione lineæ D Z ad lineam E I. Eſt autem & ratio* „ *lineæ D Z ad E I eadem rationi lineæ Z B ad lineam* „ *B E, cum æquidiſtantes ſint lineæ E I & Z D. Ratio igi-* „ *tur lineæ G A ad lineam A E compoſita eſt ex ratione li-* „ *neæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ Z B ad li-* „ *neam B E. Quod erat demonſtrandum.*

Aliter.



Vt ſupra eſt
GD DZ BE vel HG ZI
a — *b* —— *d* / *f*
& *af* ꝏ *bd*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *ac* ...... *af*
BZ ZI
ſeu *c* ...... *f*

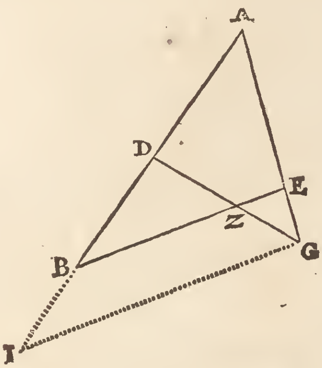
DZ
BE vel HG
b.
med. term. *d*
GD
a.

Ductâ G K parallelâ ipſi B E, donec occurrat productæ A B in K, agatur B H æquidiſtans A G, occurrens ipſi K G in H, jungaturque H D, ſecans B E in I.

Quoniam itaque, propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ K A G & B A E, G A eſt ad A E, ſicut K G ad B E vel H G; ſed ut K G ad G H, ita quoque eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ K D G & B D Z, lineamque D H in utroque ſimiliter ductam, B Z ad Z I. Quare etiam

etiam erit G A ad A E, ſicut B Z ad Z I. Hinc aſſumpta forinſecus lineâ B E, quoniam ratio B Z ad Z I compoſita eſt ex ratione B Z ad B E, & ex ratione B E vel H G ad Z I, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ H D G & I D Z, ex G D ad D Z: erit perinde ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione G D ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Adhuc aliter.

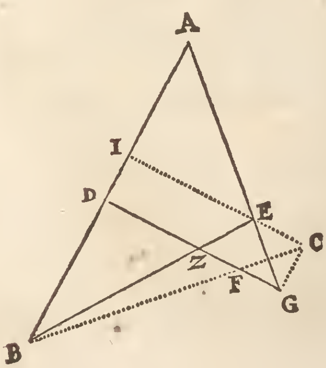


Vt ſupra eſt
DZ GD BZ IG
b——a——c / g
& $bg \infty ac$.

Ratio
GA ad AE
$\frac{ac \ldots\ldots bd}{}$
vel $\frac{bg \ldots\ldots bd}{\text{IG} \qquad \text{BE}}$
ſeu g ...... d
GD . BZ .
a . c med. ter.
. DZ
b

Etenim ductâ G I parallelâ B E, uſque dum occurrat productæ A B in I: erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ I A G & B A E, ut G A ad A E, ita I G ad B E. Hinc cum, aſſumptâ forinſecus rectâ B Z, ratio ipſius I G ad B E compoſita ſit ex ratione I G ad B Z, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ I D G & B D Z, ex G D ad D Z, & ex ratione B Z ad B E: erit pariter ratio G A ad A E ex iiſdem rationibus compoſita. Quod erat oſtendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Vt ſupra eſt
BE BZ GD DF
d — c — a / h
& $dh \infty ac$.

Ratio
GA ad AE
$\frac{ac \ldots\ldots bd}{}$
vel $\frac{dh \ldots\ldots bd}{\text{DF} \qquad \text{DZ}}$
ſeu h ...... b
BZ . .
c DG vel IC
. a med.ter.
. BE
: d.

 Ductâ

Ductâ G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectæ I E C ipsi D G parallelæ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2do Ptolemæi Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

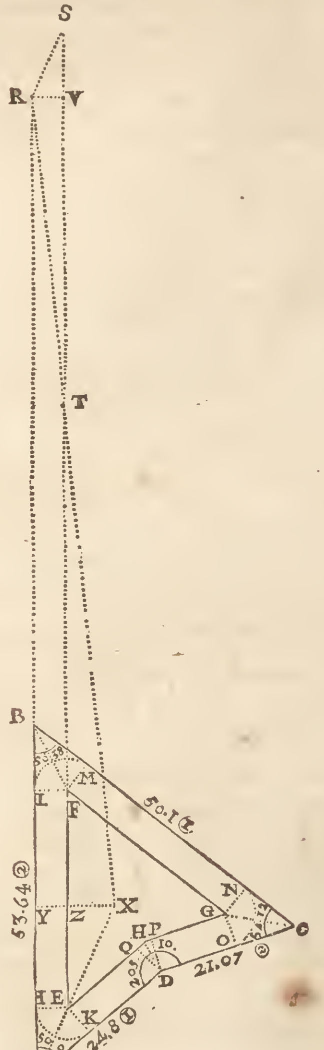
Vnde constat, præsuppositâ Algebræ cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cujusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebræ sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

Problema.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem resecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo dissitis.

Iunctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata,



drata, quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per* 47 *primi Elementorum* ſunt æqualia, erunt & ipſa inter ſe æqualia. Eſt autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia ſint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per* 8 *primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam diviſus. Haud ſecus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam diviſos eſſe.

Series *Analyſeos.*

Eſto A B ∞ a
B C ∞ b
C D ∞ c
D A ∞ d
& E I, F L, F M, G N, G O, D P, D Q, vel E K ∞ x.

Iam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum ſemiſſes dati ſint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hoſce conſtitutorum data quoque ratio laterum.

Pona-

Ponatur itaque E I ad I A vel E K ad K A esse, ut e ad f
FL ad L B vel F M ad M B, ut e ad g
G N ad N C vel G O ad O C, ut e ad h
& D P ad P H vel D Q ad Q H, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$
FL vel F M LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$
GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x /. ad $\frac{hx}{e}$
DP vel D Q PH vel H Q
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$

Additis jam A I, A K, L B, B M, N C, C O, si ipsarum summa $\frac{2fx+2gx+2hx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum A B, B C, C D, & D A, relinquetur $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx}{e}$, summa rectarum I L, M N, O D, & D K, id est, ipsarum E F, F G, G P, & Q E. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum P H, H Q, erit $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx+2ix}{e}$ summa laterum internorum E F, F G, G H, & H E. Porrò quoniam portio abscindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi potest, cujus duo latera sunt parallela, fit ut si A B, B C, C D, & D A in rectam lineam A R junctim collocentur, ut & E F, F G, G H, & H E in rectam lineam E T, trapezium A R T E ipsi portioni abscindendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo scilicet latera parallela A R & E T, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudinem E I seu x, habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx\frac{-fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k, id est, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \propto \frac{aex+bex+cex+dex}{f+g+h-i}-\frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæſitâ EI manifeſtè majorem, idcirco meritò hîc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis E I vel E K, F L vel F M, G N vel G O, & D P vel D Q deſcriptis circulis rectæ A I vel A K, L B vel B M, N C vel C O, & P H vel H Q tangentes ſunt complementorum ſemiſſium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, ſi *e* pro radio ſumatur, ipſæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes deſignent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum ſit, à quibus hujuſmodi portio reſecari debet: haud difficulter poterimus, ſi angulos A, B, C, ſimilesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujuſce generis exiſtunt, atque præter æquationis conſtitutionem ſpectemus inſuper, quænam ad illam reſolvendam ſive ad quæſitam latitudinem ex ea obtinendam ſint facienda, regulam inde generalem formare, quæ ſic ſe habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur ſumma per radium 100000, productumque dividatur per ſummam tangentium, angulorum qui ſemiſſium datorum ſunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes ſunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni exiſtunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abſcindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam ſummam vel differentiam tangentium, & fit ſecundum inventum. Quo ſubducto à quadrato ſemiſſis primi inventi, ſi reliqui radix ab eodem ſemiſſe auferatur, relinquetur latitudo quæſita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propoſitum ſolvendum ſit, ipſius veritas ex ſequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm eſt aliena, manifeſta fiet; ſi modò ibidem conſideraverimus, completo parallelogrammo A R S E, productisque A E, R T donec coëant in X, rectam S T, duplum ſupra dictæ ſummæ vel differentiæ tangentium referre, atque demiſſis perpendicularibus R V & X Y rectam S T ad R V, ob ſimilitudinem triangulorum S T R & A R X, eam habere rationem, quam A R habet ad X Y.

Angul.
A. 50. 0′ Add.
semissis. 25.0′, ejus Tang. Compl.
B. 50.38′ AI vel AK est 214451
semissis. 25.19, ejus Tang. Compl.
C. 54.12′ LB vel BM est 211392
semissis. 27. 6, ejus Tang. Compl.
NC vel CO est 195417
D. 205.10′ 621260
semissis. 102.35, ejus Tang. Compl. } subtr.
PH vel HQ est 22322
differentia 598938
2 Rad. RV.

	Add.
AB.	53|54
BC.	50|1
CD.	21|07
DA.	24|8

partes ST. 1197876—100000—AR. 149,61 (2)
multipl.

Vt △ ARX seu ½XY, AR ad □ XY seu XY, XY, vel, relicta communi altitudine XY ut ½ AR ad XY, sive etiam, propter simil. △rum STR & ARX ut ½ ST ad RV, ita

AR. 14961 (2)
ad XY. 1249 (2).
134649
59844
29922
14961
product. 1868|6289 (4)
semissis seu triang. ARX. 934|3144 (4)
subtr. part. resec. seu trap. ARTE. 600|
598938—100000—rel. triang. ETX. 334|3144 (4) / ad □ XZ. 55|81|78 (4)
eritque XZ. 7|4|7 (2).

Hinc subducta XZ seu 747 (2) ex XY seu 1249 (2), relinquetur 502 (2) pro YZ latitudine quæsita portionis abscindendæ.

Cæterùm cum non absimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abscindi possit, aut etiam quæ ipsius figuræ certam partem sive partes contineat, lineis quibusdam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem æquali intervallo distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, præsertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectantes jam sæpiùs in Lectionibus nostris Publicis abundè pertracta-

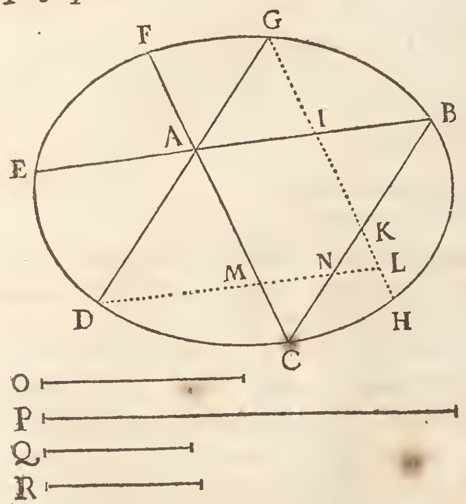
veri-

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Problematis pag. 372 ut concessum supponitur.

Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaque post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè resoluto corroborâssem: visum fuit calculum è quo eandem resolutionem tunc deprompsi hîc in medium afferre, ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ob oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370 ulteriùs sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.



Assumpto quæsito ut vero, hoc est, G A esse ad A F, sicut C B ad A G ducatur porrò D L parallela A B, secans C A, C B in M & N, ac occurrens ipsi G H in L, ponaturque D A $\infty\, y$.

Deinde calculus sic procedat

Ex assumptione est

C A A F C B A G

c —— d —— b / ad $\frac{db}{c} \infty\, z$

Ex similitudine $\triangle^{lorum}$ B A C & A I G est

B C C A A G G I

b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d. Vnde IK erit $\infty\, c - d$. pro qua brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione G I inveniri æqualem F A.

 item-

itemque

CA AB GI IA

c — a — d / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

Ex ſimilitudine Δ^{rum} C A B & K I B eſt

A E. e

E I. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

c — a — f / ad I B. $\frac{af}{c}$

▭EIB. $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Ex hypotheſi eſt

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \propto y$

Ex natura Ellipſis, per 17. 3[tii] Conicorum Apollonii, proportionalia ſunt

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc — cx — yz — bz — zz

ſeu, rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K

FA KH DA KB

d — x — y — b — z

hoc eſt, reſtitutis valoribus ipſarum y & z

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ ſeu $\frac{fb}{c}$

Vnde K H ſeu x, per 16. 6[ti], fit $\propto \frac{acd-add}{ce}$ ſeu $\frac{adf}{ce}$

add. I K. f.

I H. $\frac{cef+adf}{ce}$

Denique ex natura Ellipſis, per 17. 3[tii] Conicorum Apollonii,

▭ GIH eſt ad ▭F A C.

Seu, propter rectas G I, F A, ſupra æquales,

IH ad A C, ut ▭EIB ad ▭EAB

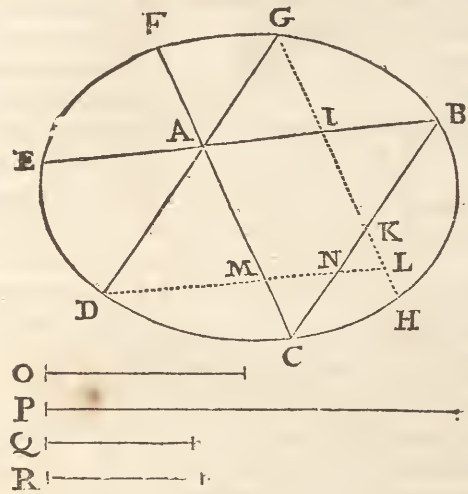
$\frac{cef+adf}{ce}$ — c — $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \propto ace+aad$.

Id quod arguit, cum aſſumendo quæſitum tanquam conceſſum per calculum hunc Geometricum ad verum conceſſum devenerimus, quæſitum illud, quod cum hoc conceſſo omnimode connectitur, eſſe quoque verum. Quod erat oſtendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo ſupradicta reſolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hîc ulteriùs ita diſponere, dictamque reſolutionem illi à latere ſic adhibere, ut cuivis ſedulò hæc inſpicienti enucleatè appareat, quiſnam inter illum & hanc reſolutionem mutuus conſenſus exiſtat. Præſertim cum hujus reſolutionis inventio deinde mihi anſam, complures alias demonſtrationes Geometricas conficiendi, ſub-

ſubminiſtraverit; atque ipſa etiam artificium detexiſſe mihi viſa ſit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonſtrationibus concinnandis, uſi ſunt. Qui quidem id unicè ſtuduiſſe videntur, quò ſua inventa eorumque demonſtrationes poſteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipſa invenerint ac demonſtrationibus muniverint, prorſus ſupprimerent & abſconderent.



Ex aſſumptione
CA AF CB AG
c —— d —— b / ad $\frac{db}{c} \infty z$

Et permutando per 16. 5
CA CB AF AG
c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$

Ex ſimilitudine △rum BAC, AIG
BC CA AG GI
b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5
CA CB GI AG
c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$

Quoniam igitur ſupponitur CA eſſe ad AF, ſicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB. ſicut AF ad AG.

Iam quia, ex ſimilitudine △rum BAC & AIG, BC eſt ad CA, ſicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, ſicut GI ad AG: erit AF per 9.5ti ipſi GI æqualis. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Quia hîc ex aſſumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipſas æquales eſſe.
Haud ſecus æquales erunt EA & DM.

Ex hypothesi

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3^{tii} Conicorum Apollonii

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

dc — cx — yz — bz — zz

H.e., rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K,

FA KH DA KB

d — x — y — b — z

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

ceb — afb

KH ce — af

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Iam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius D A ad K B in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgo fit) omnino sit Algebraïca: calculum hîc apponam è quo ipsæ D A & K B resultant.

Porrò cum ex natura Ellipsis ▭ F A C sit ad ▭ G K H, seu, propter rectarum A C, G K æqualitatem, F A ad K H, sicut ▭ D A G ad ▭ C K B, h. e., propter æqualitatem rectarum A G, C K, ut D A ad K B; & quidem ratio D A ad K B, composita sit ex ratione D A ad C B seu E A ad A B, & ex ratione C B ad K B seu C A ad I K: erit quoque ratio F A ad K H composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K. Ideoque cum ratio composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K, sit ea, quam habet ▭CAE ad ▭K I, A B: erit similiter ratio ipsius F A ad K H ea, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B.

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

c — f — b / ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

e — a

CA IK

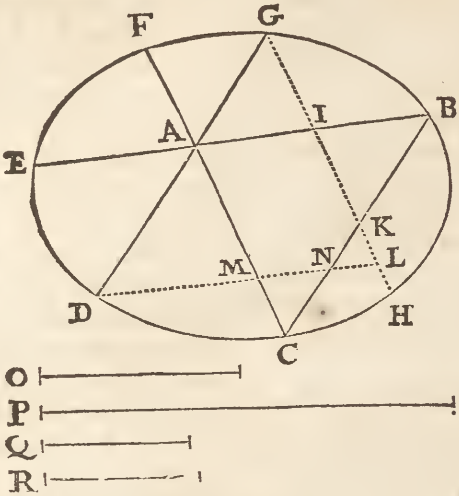
23.6. c — f

▭CAE ▭KI,AB

ce — af

Vbi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus B C ipsis A D & K B præcedat, quod ratio ipsius A D ad K B, per hujus B C interpositionem, sit composita ex ratione A D ad B C seu E A ad A B, hoc est, e ad a, & ex ratione B C ad K B seu C A ad I K, hoc est, c ad f. Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23. 6, sit eadem rationi, quam habet ▭CAE ad ▭KI,AB, seu ce ad af: erit quoque

que ratio ipſius F A ad K H ſeu d ad x eadem, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B, ſeu ce ad af.



Ad comparandam I H cum A C, quia, inventâ K H $\infty \frac{adf}{ce}$, ad K H addi priùs debet I K ∞f, ut habeatur I H $\infty \frac{cef+adf}{ce}$, ſed hoc pacto ratio ipſius I H ad A C non ſatis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæſivi priùs rationem ipſius I H ad I K; inde per compoſitionem rationis converſam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipſius I H ad A C, ut ſequitur.

Eſto K I ad F A, K H

f ———— d x

ut O ad C A.

3 * $\frac{cf}{d}$ ———— c

Mult. per A E. e . . . . e

hoc eſt, ut ▭ O, A E ad ▭ C A E ▭ K I, A B

per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ———— ce . . . . . . af

Vnde ex æquo & per compoſitionem rationis converſam erit

Vt K I + K H ſeu I H ad K I,

$f + x$ ———— f

ſic ▭ O, A E + ▭ K I, A B ad ▭ O, A E.

$\frac{cef}{d} + af$ ———— $\frac{cef}{d}$

Eſto jam K I ad F A, ſicut linea O ad C A. Vnde, aſſumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad F A, ſicut ▭ ſub O & A E ad ▭ C A E. Erat autem F A ad K H, ſicut ▭ C A E ad ▭ K I, A B. Quare ex æquo erit ut K I ad K H, ſic ▭ O, A E ad ▭ K I, A B; & per compoſitionem rationis converſam K I + K H ſeu I H ad K I, ſicut ▭ O, A E + ▭ K I, A B, ad ▭ O, A E.

Sit

IH Sit KI ad AC,
$f+x$ .... f —— c
ut O ad P. 4*
$\frac{cf}{d}$ —— $\frac{cc}{d}$
Mult. per A E. e .... e
hoc eſt,
▭O,AE+▭KI,AB ut ▭O,AE ad ▭P,AE
$\frac{cef+adf}{d}$ .... $\frac{cef}{d}$ —— $\frac{cce}{d}$

Vnde ex æquo erit ut I H ad A C, ita ▭ O, A E + ▭ K I, A B ad ▭ P, A E.

Sed ut I H ad A C, ita quoque eſt propter rectas I G & F A ſupra æquales
mult. per I G ...... F A
per 1.6. ▭GIH ad ▭FAC, hoc eſt, per 17.3tii Conic. Apoll., ut ▭EIB ad ▭EAB

Quocirca erit ut ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭ P, A E, ita ▭E I B ad ▭E A B.

Deinde ſit ut K I ad A C, ita O ad P. Vnde, aſſumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad A C, ſicut ▭ O, A E ad ▭ P, A E. Sed ut I H ad K I, ita eſt ▭ O, A E + ▭KI, A B ad ▭O, A E. Quapropter ex æquo erit ut I H ad A C, ſic ▭ O, A E+▭KI, AB ad ▭ P, A E. Cum verò rurſus, ut ante, ▭GIH ſit ad ▭FAC, ſicut ▭ E I B ad ▭ E A B; & quidem IG & A F, ut ſupra, æquales ſint oſtenſæ: erit quoque I H ad A C, ſicut ▭EIB ad ▭EAB. Vt autem IH ad AC, ſic quoque erat ▭ O; A E + ▭ K I, A B ad ▭ P, A E. Quocirca erit ut ▭ O, A E + ▭ K I, A B ad ▭P, A E ita ▭ E I B ad ▭ E A B.

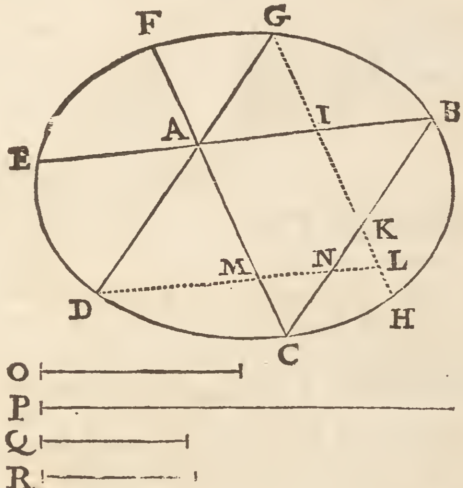
Fiat jam, ut A E ad A B, ita KI ad Q
e —— a —— f / $\frac{af}{e}$. 5*
eritque per 16.6. ▭KI,AB ∞ ▭Q,AE. Adeoque ut
▭O,AE+▭KI,AB, ſeu Q,AE ad ▭P,AE, hoc eſt, rejectâ communi altitudine A E,
ut O + Q ad P, ſic ▭ E I B ad ▭E A B.
$\frac{cf}{d}+\frac{af}{e}$ —— $\frac{cc}{d}$ —— $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ —— ea

Fiat jam ut A E ad A B, ita K I ad Q: eritque ▭KI, AB æquale ▭Q, A E. Hinc ut ▭ O, A E plus ▭KI, AB ſeu Q, AE, ad ▭P, AE, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A E, ut O + Q ad P, ſic ▭ E I B ad ▭ E A B.

Explicita itaque eſt ratio, quam habet ▭ G I H ad ▭ F A C, quippe oſtenſa eſt eadem quæ ipſius I H ad A C, ſeu O + Q ad P. Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter □ E I B & □ E A B.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^{or} dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem absolvatur.



E I seu E A + A I — E A

$\frac{ce+ad}{c}$ ——— e

23.6 I B — A B

$\frac{af}{c}$ ——— a

□ E I B seu □ sub E A + A I in I B — □ E A B

$\frac{ceaf+adaf}{cc}$ ——— ea

Vt E I seu E A + A I est ad E A,

$\frac{ce+ad}{c}$ ——— e

Mult. per C A. c c

sic □ E A, C A + □ A I, C A est ad □ C A E.

$ce+ad$ — ce

Vel, si pro □ E A, C A, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ C A B & A M D, ubi C A est ad A B,

Porrò quoniam ratio $□^{li}$ E I B ad □ E A B composita est ex ratione E I seu E A + A I ad E A, & ex ratione I B ad A B; & quidem E A + A I ad E A, si com-ſicut A M ad MD ſeu E A ſcribatur $\square$B A M, ſicut $\square$ B A M + $\square$ C A I ad $\square$ B A M.

Vel rurſus, ſi pro $\square$C A I, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B A C & A I G, ſcribatur $\square$ B A, G I, ſicut $\square$ B A M + $\square$ B A, G I ad $\square$ B A M, hoc eſt, relictâ communi altitudine B A, ſicut A M + G I, hoc eſt, G L ad A M.

Vide ſupra ad notam 1 *

Vt I B eſt ad A B,

$\frac{af}{c}$ ——— a

Mult. per C A

c c

ita $\square$ I B, C A eſt ad $\square$ C A B.

af ——— ca

Vel, ſi pro $\square$ I B, C A, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ C A B & K I B, ſcribatur $\square$ K I, A B, ſic $\square$ K I, A B, ad $\square$ C A B, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſicut K I ad C A.

Vide ſupra ad notam 2 *

communis aſſumatur altitudo C A, ſit ſicut $\square$C A E, ſeu B A M, + $\square$C A I ſeu B A, G I ad $\square$C A E ſeu B A M, hoc eſt, relinquendo communem altitudinem B A, ſicut A M + G I ſeu G L ad A M; at verò I B ad A B, ſicut $\square$ I B, C A ſeu K I, A B ad $\square$ C A B, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A B, ſicut K I ad C A: Erit quoque ratio $\square^{li}$ E I B ad $\square$ E A B, hoc eſt, ipſius O + Q ad P, compoſita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Conſtat igitur, rationem $\square^{li}$ E I B ad $\square$ E A B ſeu ipſius O + Q ad P eſſe compoſitam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Iam quia ſuperior ratio ipſius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipſi ductæ ſunt, reſpondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, ſi cum ratione G L ad A M, aut K I ad C A confertur, ex his compoſitam eſſe, quemadmodum ex aſſumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

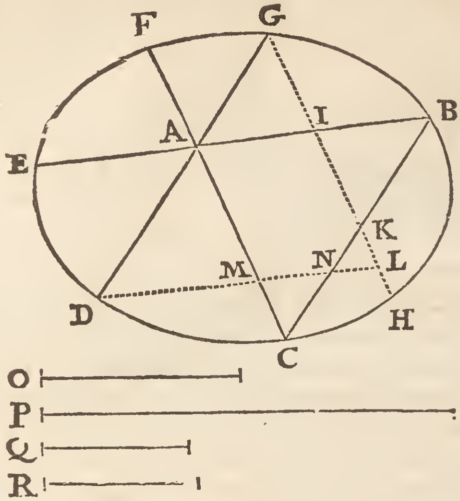
K I ad Q, ſic F A ad R.

f ——— $\frac{af}{e}$ ——— d / $\frac{ad}{e}$. 6 *

eritque, per 16. 6^{ti},

$\square$K I, R ∞ $\square$ Q, F A.

Denique fiat ut K I ad Q, ſic F A ad R: eritque $\square$K I, R æquale $\square$ Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Vt O + Q est ad P,

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ —— $\frac{cc}{d}$

Mult. per F A. d. . . . . . d

sic□O, FA seu KI, CA, +□Q, FA seu KI, R est ad □P, FA seu □ C A.

Vide supra ad notam 3 * $cf + \frac{daf}{e}$ ———— cc

Cur □P, FA sit ∞ □ C A, ita concluditur

3 * Est namque K I ad F A, ut O ad C A;

f —— d —— $\frac{cf}{d}$ —— c

& convertendo

F A ad K I, C A

d —— f c

ut C A ad O. P

c —— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$

Vnde ex æquo erit

ut F A ad C A, ita C A ad P.

d —— c —— c —— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17. 6ti, □P, F A ∞ □ C A.

ad P, assumendo communem altitudinem F A, sit sicut □ O, F A seu K I, C A, + □lo Q, F A seu K I, Rad □ P, F A seu □ C A: Erit ratio composita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A eadem rationi □li K I, C A + □ K I, R ad □ C A, hoc est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione K I ad C A, & ex ratione C A + R ad C A. Ideoque si communis auferatur

Vide supra ad notam 4*

 KI

$$\begin{array}{lll} & KI & CA \\ & f \text{------------} & c \\ 23.6. & CA + R & CA \\ & c + \frac{ad}{e} \text{------------} & c \\ \hline & \Box KI,CA + \Box KI,R & \Box CA \\ & cf + \frac{daf}{e} \text{------------} & cc \end{array}$$

ratio K I ad C A, erit quoque reliqua ratio G L ad A M eadem reliquæ rationi C A + R ad C A hoc eſt, erit G L ad A M, ut C A + R ad C A. Quod verum eſſe deinceps ſic oſtenditur.

Hinc cum ratio $\Box^{li}$ G I H ad $\Box$ F A C ſive ipſius I H ad A C eadem ſit oſtenſa quæ ipſius O + Q ad P, & hæc rurſus eadem rationi, quæ componitur ex ratione K I ad C A, & ex ratione C A + R ad C A; at verò ratio $\Box^{li}$ E I B ad $\Box$ E A B eadem rationi, quæ componitur ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A: ſequitur, ſi ratio $\Box^{li}$ G I H ad $\Box$ F A C (quemadmodum ſuppoſitum fuit) eadem ſit rationi $\Box^{li}$ E I B ad $\Box$ E A B, rationem compoſitam ex K I ad C A, & ex ratione C A + R ad C A debere quoque eandem eſſe rationi, quæ ex G L ad A M, & ex K I ad C A componitur. Ac proinde, ſi utrobique communis auferatur ratio K I ad C A, rationem reliquam C A + R ad C A eandem quoque fore reliquæ rationi G L ad A M.

Hoc autem cum nondum per ſe evidens ſit, ſupereſt ut ipſum ſequenti argumentatione reſolvamus atque penitus manifeſtum reddamus.

Ex ſimilitudine $\triangle^{lorum}$ A B C & M D A eſt

$$\begin{array}{llll} AB & AC & MD \text{ ſeu } AE & MA \text{ ſeu } IL \\ a \text{---} & c \text{------------} & e / & \text{ad } \frac{ce}{a}. \end{array}$$

Vnde G L fit $\infty\, d + \frac{ce}{a}$.

Ex ſimilitudine $\triangle^{lorum}$ A B C & I A G eſt

$$\begin{array}{llll} BA & AC & AI & IG \text{ ſeu } AF \\ a \text{----} & c \text{----} & \frac{ad}{c} & \text{----}\, d \end{array}$$

Ac proinde, per 16.6^{ti}, $\Box$ B A F ∞ $\Box$ C A I.

Ex ſimilitudine $\triangle^{lorum}$ G L D & A M D eſt

$$\begin{array}{ll} GL & \text{ad } AM, \\ d + \frac{ce}{a} \text{------} & \frac{ce}{a} \end{array}$$

Quoniam enim, propter ſimilitudinem triangulorum G L D & A M D, eſt ut G L ad A M ita D L ſeu E I ad

D M

ſicut D L ſeu E I ad D M ſeu E A;

$e + \frac{ad}{c}$ ——— e

mult. per C A. c c

Vel per 1. 2di ſicut ▭ E I, C A ſeu C A E + C A I ſeu AE, R ad ▭ CAE.

$ce + ad$ ——— ce

hoc eſt, relictâ communi altitudine A E ſicut C A + R ad C A.

D M ſeu E A; ut autem E I ad E A, ita, aſſumptâ communi altitudine C A, ▭ E I, C A ſeu C A E plus ▭ C A I ſeu A E, R eſt ad ▭ C A E: Erit ut G L ad A M, ita ▭ C A E + ▭ R, A E ad ▭ C A E, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A E, ſic C A + R ad C A.

Ex conſtructione eſt

Vide ſupra ad notam 6*

	KI	Q	FA	R
	f ——	$\frac{af}{e}$ ——	$d/$	$\frac{ad}{e}$
itemque	AE	AB	KI	Q
	e ——	a ——	$f/$	$\frac{af}{e}$
Ideoque	AE	AB	FA	R
per 11. 5ti.	e ——	a ——	d ——	$\frac{ad}{e}$

Vide ſupra ad notam 5*

Ac proinde per 16. 6ti, ▭ B A F ∞ ▭ A E, R.

Hinc cum ▭ B A F etiam ſit ∞ ▭ C A I, erit ſimiliter ▭ A E, R ∞ ▭ C A I.

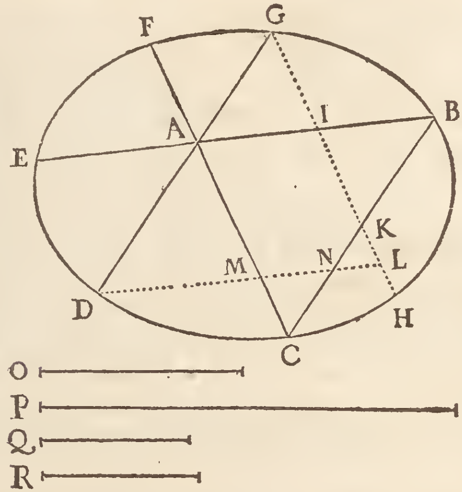
Patet itaque G L eſſe ad A M, ſicut C A + R ad C A. Vt erat propoſitum.

Quare cum hoc pacto, aſſumentes quæſitum tanquam verum, per reſolutionem Geometricam devenerimus ad verum conceſſum: ſequitur, quæſitum illud, quod cum conceſſo iſto omnimodè connectitur, verum eſſe. hoc eſt, umbram baculi C, quæ tranſibat per A, tranſiiſſe ſimiliter per B. Quod erat demonſtrandum.

Et hæc quidem, quæ Reſolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad ſolutionem Problematis pag. 372 ut conceſſum ſuppoſitum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis ſtatuunt ex falſis etiam poſſe verum concludi, reſolutio hæc ad quæſiti oſtenſionem incerta videri poteſt: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à conceſſis ad quæſita, prout ad hoc me inſtigavit præſtantiſſimus ac unde-

undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematatis discipulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filum calculi sequitur, qualis extat pag. 370 & 371, *at eodem nonnihil hic immutato; ut appareat passim artificium, quo singula Geometricè explicari queant.*



Positâ, ut ante, A D ∞ y

erit ut B A ad A E, ita B C ad A D

a —— e —— b / ad y seu $\frac{be}{a}$.

ac proinde per 16. 6[ti]

▭ B A, A D, ▭ B C, A E

$a \quad ay \quad ∞ \quad be.$

Ex natura Ellipsis per 17 Conicorum Apollonii

A D. y K B. $b - z$

A G. z A G vel C K z

est ▭ D A G. $\overline{yz}$ ad ▭ C K B. $\overline{bz - zz}$,

F A. d K H. x

A C. c.   A C vel K G. c

ut ▭ F A C. $\overline{cd}$ ad ▭ G K H. $\overline{cx}$.

Quoniam igitur ex hypothesi est B A ad A E, sicut B C ad A D: erit ▭[lum] sub extremis B A, A D a æquale ▭[lo] sub mediis B C, A E. Deinde quoniam ex natura Ellipsis est, ut ▭ D A G ad ▭ C K B, sive, rejectâ communi altitudine A G vel C K, ut D A ad K B, ita ▭ F A C

ad

AG AC

id est, rejectis communibus altitudinibus z & c,
erit ut D A ad K B, ita F A ad K H

y——b—z——d/ ad x.

BA

sive, assumendo communem altitudinem a,

ut ▭BA, AD seu ▭BC, AE ad ▭BA.KB, ita FA ad KH

α ay vel be——ab—az——d/ ad x. δ

ad ▭ G K H, id est, relictâ communi altitudine A C vel G K, ita F A ad K H; & quidem D A ad K B, si B A pro communi altitudine sumatur, sit sicut ▭BA, AD seu α B C, A E

ad ▭B A, K B: erit ut ▭B C, A E ad ▭ B A, K B, ita F A ad K H.

Esto jam K I ∞ f.

eritque propter similitudinem $\triangle^{rum}$ B C A & B K I
ut B C ad C A, ita B K ad K I

b——c——b—z/ ad f seu $\frac{cb-cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}.

add. H K. x ▭BC.KI, ▭CA, BK
mult. H I. $\overline{f+x}$ ζ bf ∞ $cb-cz$
per I G. h

Deinde sit I G ∞ h.

▭GIH. $fh+hx$

eritque propt. simil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I
ut B C ad C A, ita A G ad G I

b——c——z/ ad h seu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

▭BC, IG ▭CA, AG
β bh ∞ cz.

Similiter esto A I ∞ k.
eritque propter simil. $\triangle^{rum}$ B C A & A G I
ut B C ad B A, ita A G ad A I

b——a——z/ ad k seu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

add. A E. e ▭BC, AI ▭BA, AG
mult. E I. $\overline{k+e}$ ε bk ∞ az.
per I B. l
▭E I B. $kl+el$

Sit item I B ∞ l.
eritque propter simil. $\triangle^{rum}$ B C A & B K I

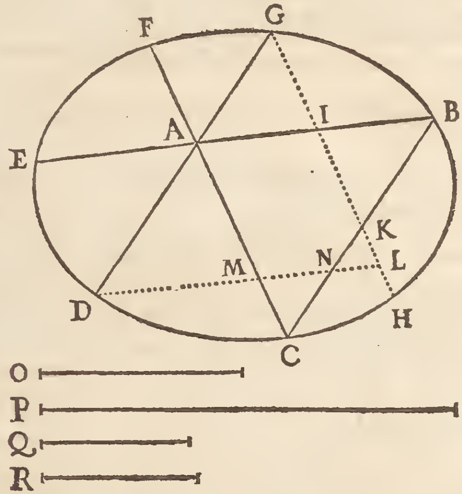
Porrò cum ex similitudine $\triangle^{rum}$ B C A & B K I, B C sit ad C A, sicut B K ad K I: erit ▭ sub B C, K I æquale ▭^{lo} sub C A, B K. Eâdem ratione cum B C sit ad B A, sicut B K ad B I: erit ▭ sub B C, B I æquale ▭^{lo} sub B A, B K.

Haud secus cum similia sint $\triangle^{la}$ B C A & A G I, ac idcirco B C ad C A, sicut A G ad G I: erit ▭ sub B C, G I æquale ▭^{lo} sub C A, A G. Similiter cum B C sit ad

ut

ut B C ad B A, ita B K ad B I
b —— a —— $b - z$ / ad l seu $\frac{ab - az}{b}$. ac proinde per 15. 6ti
▭ B C, B I ▭ B A, B K
γ $bl \propto ab - az$.

B A, sicut A G ad A I : erit pariter ▭ sub B C, A I æquale ▭lo sub A B, A G.



Ex natura Ellipsis per 17.3tii Conic. Apollonii est ▭ F A C ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B
cd —— $hf + hx$ —— ael ad $kl + el$.
Est autem per 23. 6ti ratio ▭li F A C ad ▭ G I H
cd —— $hf + hx$
composita ex ratione F A ad I H seu I K + K H, &
d —— $f + x$
ex ratione C A ad G I, id est, assumendo commu-
c —— h
B C
nem altitudinem b, ex ratione ▭li
β
B C, C A ad ▭ B C, G I vel ▭ C A, A G, sive, reje-
bc —— bh seu cz
C A
ctâ communi altitudine c, ex ratione B C ad A G.
b —— z.

Iam verò, quia ex natura Ellipsis ▭ F A C est ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B; & quidem ratio ▭li F A C ad ▭ G I H composita sit ex ratione F A ad I H seu I K + K H, & ex ratione C A ad G I, id est, assumendo communem altitudinem B C, ex ratione ▭li B C, C A ad ▭ B C, G I vel β ▭ C A, A G, sive etiam, re-

Simi-

Similiter ratio ▭[li] E A B ad ▭ E I B composita est

$ae - kl + el$

ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.

$e - l$ $a - k + e.$

Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi

$e - l$ b

altitudine sumatur, eadem est quæ ▭[li]

γ

B C, E A ad ▭ B C, I B seu ▭ B A, B K, hoc est, ea-

$be - bl$ vel $ab - az$

dem quæ δ F A ad K H.

$d - x$

Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitu-

$a - k + e$ b

dine sumatur, eadem, quæ ▭[li] A B, B C ad ▭ B C, E I

$ab - bk + be$

ε α

vel ▭ B C, A I, id est, B A, A G, + ▭ B C, E A vel ▭ B A,

sive $az + ay,$

A D, hoc est, relictâ communi altitudine A B, seu a, eadem quæ B C ad A G + A D.

$b - z + y.$

Erit igitur ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,

$d - f + x$ $b - z$

per 23. 6[ti], ratio ▭[li] F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G,

$bd - fz + xz$

eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,

$d - x$

& ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6[ti],

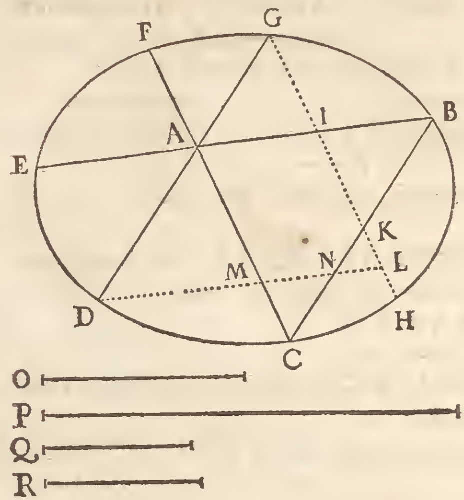
$b - z + y$

eadem rationi, quam habet

▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.

$bd - xz + xy.$

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio ▭[li] E A B ad ▭ E I B composita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi altitudine sumatur, est sicut ▭ B C, E A ad ▭ B C, I B seu γ ▭ B A, B K, quæ eadem ostensa est δ rationi F A ad K H; sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitudine sumatur, ut ▭ A B, B C, ad ▭ B C, E I, id est, ad ▭ B C, A I vel ε B A, A G, + ▭ B C, E A vel α ▭ B A, A D, sive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23. 6[ti], ratio ▭[li] F A, B C ad ▭ I K, A G + ▭ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D. id est, per 23. 6[ti], eadem rationi, quam habet ▭ F A, B C ad ▭ K H, A G + ▭ K H, A D.



Hinc cum
▭FA,BC, ſit ad ▭IK,AG + ▭KH,AG, ſicut idem ▭FA,BC ad
bd ——— $fz + xz$ ——— $bd/$
▭KH, AG + ▭KH, AD: erit, per 9. 5^{ti},
ad $xz + xy$:

▭IK,AG + ▭KH,AG æq. ▭KH,AG + ▭KH,AD.
$fz + xz$ ∞ $xz + xy$.

Vnde, dempto utrinque communi ▭^{lo} KH, AG,
xz

erit quoque reliq. ▭IK, AG æquale reliquo ▭^{lo}
fz

KH, AD
xy

Ac proinde, per 16. 6^{ti},
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— x —— $y/$ ad z.

Hinc cum ▭ FA, BC ad ▭IK, AG + ▭KH, AG eandem habeat rationem, quam idem ▭FA, BC ad ▭KH, AG + ▭KH, AD: erit ▭IK, AG + ▭KH, AG æquale ▭^{lo} KH, AG + ▭^{lo} KH, AD. A quibus ſi commune auferatur ▭KH, AG, erit quoque reliquum ▭IK, AG æquale reliquo ▭^{lo} KH, AD. Vnde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Sed

B C
Sed ut I K ad K H, ita eſt, aſſ. comm. altit. *b*,
f —— *x*

ζ
▭I K,B C vel ▭C A,B K ad ▭K H,B C.
bf *cb* — *cż* ——— *bx*.

A B
At D A ad A G, ita aſſ. comm. alt. *a*, eſt ▭D A, A B
y —— *z* *ay*

α
vel ▭ B C,A E ad ▭ A G, A B.
be ——— *az*.

Quare erit ut
▭C A,B K ad ▭K H,B C, ita ▭B C, A E ad ▭A G, A B.
cb — *cz* —— *bx* ——— *be* / ad *az*.

δ B C
Cum autem ſupra ſit F A ad K H, i.e., aſſ. comm. alt. *b*,
d —— *x*
▭F A,B C ad ▭K H,B C, ſicut ▭A E,B C ad ▭K B,B A,
bd ——— *bx* ———— *be* / ad *ab* — *az*,
hoc eſt, convertendo
▭K H,B C ad ▭F A,B C, ſicut ▭K B,B A ad ▭A E,B C:
bx ——— *bd* ——— *ab* — *az* / ad *be*:
Erunt ▭C A,B K ▭K H,B C ▭F A, B C tres magnitudines ab una parte,
cb — *cz* —— *bx* .... *bd*
& ▭K B,B A ▭A E,B C ▭A G,A B tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:
ab — *az* ..... *be* ——— *az*

Sed ut I K ad K H, ita eſt, aſſumptâ communi altitudine B C, ▭ I K, B C vel ζ ▭ C A, B K ad ▭ K H, B C. At ſicut D A ad A G, ita, aſſumptâ communi altitudine A B, ▭D A, A B vel α ▭ B C, A E ad ▭ A G, A B. Quare erit ut ▭C A, B K ad ▭K H, B C, ita ▭B C, A E ad ▭ A G, A B. Cum autem ſupra ſit δ, ut F A ad K H, ſive, aſſumptâ communi altitudine B C, ▭ F A, B C ad ▭ K H, B C, ita ▭ A E, B C ad ▭ K B, B A; id eſt, convertendo, ▭ K H, B C ad ▭ F A, B C, ſicut ▭K B, B A ad ▭ A E, B C: erunt ▭ C A, B K, ▭ K H, B C, & ▭ F A, B C 3 magnitudines ab una parte, & ▭ K B B A, ▭ A E, B C, & ▭ A G, A B tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata.

Quare etiam per 23. 5[ti] ex æqualitate proportionales erunt

id eſt, ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ſicut ▭ K B, B A

c b — c z ——— *b d* ——— *a b — a z*

B A

ad ▭ A G, B A, ſeu, rej. com. alt. *a*, ut K B ad A G.

——— *a z* . . . . *b — z* ——— *z*.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando ſc. tum extremos tum medios terminos, oſtendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò perveniſſe, ubi c b z — c z z æquatur b b d — b d z.

Denique ut inveniatur A G ſeu *z*, quoniam ſumendo C A ſeu *c* pro communi altitudine,

K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G:

b — z —— *z* ——— *c b — c z* / ad *c z*:

erit ut

▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G.

c b — c z ——— *b d* ——— *c b — c z* / ad *c z*.

Hinc cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G

c b — c z *b d* *c z*

eandem habeat rationem, erit per 9. 5[ti],

▭ F A, B C. æq. ▭[lo] C A, A G.

b d ∞ *c z*.

Vnde per 16. 6[ti] erit,

ut C A ad A F, ita B C ad A G.

c —— *d* —— *b* / ad *z*.

Quod erat propoſitum.

Vnde & ipſæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ K B, B A ad ▭ A G, B A, id eſt, relictâ communi altitudine B A, ita K B ad A G. Denique, quoniam, aſſumptâ communi altitudine C A, K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G: erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G. Quocirca cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G eandem habeat rationem, erit ▭ F A, B C æquale ▭[lo] C A, A G; ac proinde C A ad A F, ſicut B C ad A G. Quod erat demonſtrandum.

F I N I S.

Celeberrimi de Centro Oſcillationis problematis ſolutio.

Viro Sapientiſſimo ſalutem dat

STEPHANVS GILLET,

Nulla in re tam irrito conatu laborarunt Viri Clariſſimi, quam in centro oſcillationis inveſtigando; licet enim quadraginta abhinc annis mathematicus celebris nusquam gentium extiterit ullus, qui huic indagationi accuratiſſime haud incubuerit, quin etiam plurimi Εὕρηκα *audacter exclamarint; nullos tamen in errores incidit nullus. Næ ego aliena infelicitate minime exterritus, viam adeo expeditam inveni, ut ad ſcopum optatum recte pervenerim. Quo circa arbitror tibi rebus mathematicis gaudenti non ingratum fore, ſi hoc arcanum tantopere inveſtigatum exhibuero.*

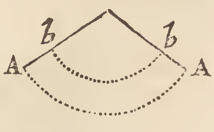
Centri oſcillationis demonſtratio.

I. *Definitio.*

OScillatio eſt ipſa agitatio penduli ſua gravitate circa axem horizonti parallelum moti. V. G. Si pendulum, A, ſuam agitationem vi gravitatis incipiat in puncto μ. inhibeatque in puncto ν. ipſa agitatio hujus penduli totum arcum $\mu\,\nu$. percurrentis vocatur oſcillatio.

II. *Definitio.*

Quorum pendulorum centra gravitatis arcus ſimiles percurrunt, eadem ſuas oſcillationes, ſimiles faciunt, ſicut pendula A & *b*.



III. *Definitio.*

Centrum oſcillationis eſt punctum, quod in pendulo compoſito agitato perinde movetur, ac ſi nullo modo ſtipatum foret: ac proinde ſi in extremo penduli ſimplicis reſideret, oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum compoſitum datum. Itaque tota difficultas huc recidit, ut inveniatur longitudo penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficiat, atque pendulum compoſitum datum: nam longitudo hujus penduli ſimplicis eadem eſt, atque diſtantia centri oſcillationis penduli compoſiti ab axe. Qua in inveſtigatione ut mens dirigatur, aliquid de gravitate, ſpatioque decurſo præmittendum eſt.

I. *Lemma.*

Gravia gravitatem habent a levioribus, quæ tantumdem aſcendunt, quantum graviora deſcendunt.

I. *Coroll.*

Hinc colliges mobili ſecundum horizontem moto gravitatem acquiri nullam: Quia nulla leviora aſcendunt.

II. *Coroll.*

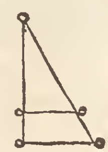
Hinc animadvertis mobili circa centrum moto gravitatem acquiri nullam: ideo quod mobile haud magis deprimitur, quam extollitur.

III. *Coroll.*

Hinc vides gravitatem acquiri per ſolam deſcenſionem centri: quippe qui alii motus pro nihilo habeantur; ac proinde incidentiam gravis ſemper eſſe ſpectandam ex altitudine deſcenſionis centri.

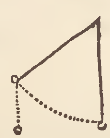
IV. *Coroll.*

Hinc perſpicis duorum gravium ex eadem altitudine cadentium, quorum unum perpendiculariter, alterum vero oblique decidit; utriuſque velocitatem eandem eſſe in horizonte, ſive in plano horizonti parallelo: propterea quod gravitas per motum vel circa centrum, vel horizonti parallelum, neque intenditur, neque remittitur.



V. *Coroll.*

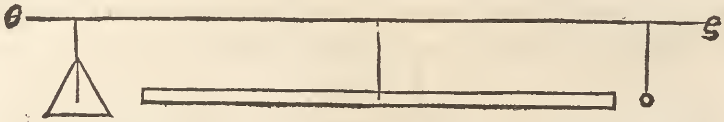
Hinc manifeſtum eſt velocitatem gravis penſilis, ſive penduli eandem eſſe, atque gravis ex eadem altitudine perp. decidentis: penſile enim nihil aliud eſt, quam grave oblique decidens.



VI. *Co-*

VI. *Coroll.*

Hinc clarum eſt eandem eſſe velocitatem in omnibus pendulis quorum centra gravitatis æque diſtant ab axibus, quandoquidem æqualiter deſcendunt.



VII. *Coroll.*

Hinc liquet eandem eſſe velocitatem ejuſdem plani tum in planum, tum in latus moti: utpote quod centrum utroque modo æque deprimatur.

II. *Lemma.*

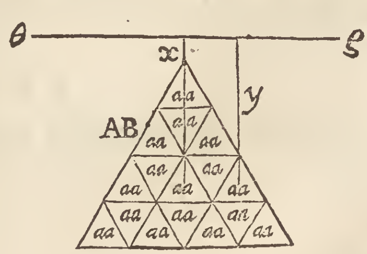
Duobus gravibus ex eadem altitudine cadentibus, quorum unum perp. alterum vero oblique ſecundum rectam lineam decidit; Tempora utriusque incidentiæ ſunt inter ſe ſicut utraque linea ſecundum quas incidunt; quandoquidem eadem eſt velocitas in utroque mobili æqualiter deſcendente.

Coroll.

Hinc ſequitur ut duobus gravibus ex eadem altitudine ſecundum ſingulas lineas rectas oblique cadentibus; Tempora utriuſque incidentiæ inter ſe referantur, ſicut utraque linea obliqua, vel ſicut ſpatia decurſa, ſi gravia ſint æqualia.

III. *Lemma.*

Si planum indefinite dividatur in partes aliquotas. Summa productorum ſingularum partium per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatarum, æqualis eſt producto totius plani per ſui centri ab eodem axe diſtantiam multiplicati.



Sit planum (A B) indefinite diviſum in partes aliquotas (*aa*), ex quibus ſingulis dimittantur ſingulæ lineæ inter ſe parallelæ, eæque ad axem $\theta\varrho$ extra poſitum perpendiculares, quæ vocentur *y*: linea e plani centro ad eundem axem perp. ducta appelletur x: dico ſummam omnium productorum, aay, eſſe æqualem producto abx.

Namque plani ita diviſi ſingulæ partes perinde ſpectari poſſunt, ac ſi forent ſingula pondera: at ex geoſtatica ſumma productorum ſingulorum ponderum per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatorum, æqualis eſt producto omnium ponderum per centri communis ab eodem axe diſtantiam multiplicatorum; Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc perſpicuum eſt ſummam productorum ſingularum partium ejuſdem plani multiplicatarum per ſingulas peripherias, quarum ſemidiametri ſunt ipſæ perpend. ad axem, eſſe æqualem producto totius plani multiplicati per peripheriam, cujus ſemidiameter eſt ipſa diſtantia centri ab axe.

II. *Coroll.*

Hinc patet ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari producto ipſius plani multiplicati per peripheriam, cujus ſemidiameter eſt diſtantia centri ipſius plani ab axe.

III. *Coroll.*

Hinc ultro emergit inveſtigatio omnium ſolidorum a planis circa axes motis deſcriptorum; ſed iſtæc alibi.

IV. *Coroll.*

Hinc deduces ſpatium a plano in planum circa axem extra poſitum moto decurſum, æquari alteri ſpatio, quod percurreretur ſi ſingula puncta, vel ſingulæ partes aliquotæ plani tantumdem ab axe diſtarent, quantum ipſius centrum gravitatis.

V. *Coroll.*

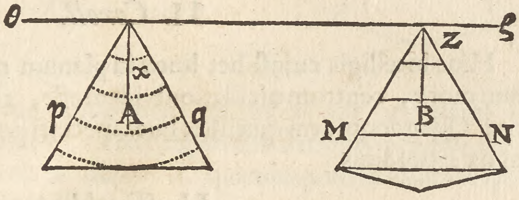
Hinc apparet ſpatia a planis æqualibus decurſa, eſſe in eadem ratione, atque eorumdem planorum diſtantias centrorum gravitatis ab axe.

VI. *Coroll.*

Hinc nullo negotio reperias ſpatium a plano in latus moto decurſum:

Si

Si enim planum A indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium ſit idem axis $\theta\,\varrho$: conficiatur planum, *b*, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ æquentur ſingulis ſectionibus cylindraceis, quæ tantumdem ab axe diſtant, V. G. linea recta M N. æquetur ſectioni. *p q*. ſicque de cæteris; ex hujus plani *b* centro linea ad axem $\theta\,\varrho$ perp. ducta vocetur Z: ex plani A centro linea perpend. ducta ad eundem axem appelletur, *x*. Spatium a plano A in planum eſt ad ſpatium ab eodem plano in latus moto decurſum, ſicut *x*. *z*. nam ſpatium a plano A in latus moto decurſum, æquatur ſpatio per planum *b* in planum motum decurſo.

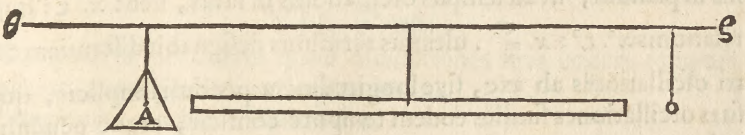


Iam vero centrum oſcillationis colluſtretur.

I. *Problem.*

Invenire centrum oſcillationis plani in planum circa axem extra poſitum moti.

Centrum oſcillationis idem eſt, atque centrum gravitatis ipſius plani.



Cum enim, ex 6° corollario primi lemmatis, & ex 4° coroll. 3^{tii} lemmatis, planum A eadem velocitate, idem ſpatium percurrat, quod percurreret ſi ipſius omnia puncta tantumdem ab axe diſtarent, quantum centrum gravitatis; neceſſe eſt ut oſcillationes ſuas eodem tempore perficiat, atque perficeret ſi ſingula puncta tantumdem ab axe diſtarent: atqui ſi ſingula puncta tantumdem ab axe diſtarent, oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum ſimplex, cujus longitudo eſt ipſa diſtantia centri gravitatis ab axe, Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc noveris omnium planorum, quorum centra gravitatis ab axe æque diſtant, idem eſſe centrum oſcillationis in planum.

II. *Coroll.*

Hinc intelligis cujuſlibet lineæ in planum circa axem extra poſitum motæ, centrum oſcillationis idem eſſe, atque centrum gravitatis; Quandoquidem quælibet linea ſpectari poteſt, ſicut planum minimæ latitudinis.

II. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis plani in latus circa axem extra poſitum moti.

Tempora oſcillationum plani tum in planum, tum in latus moti, ſunt inter ſe, ſicut ſpatia utroque motu decurſa; propterea quod utriuſque oſcillationis tempora perinde ſpectanda ſunt, atque tempora incidentiarum duorum gravium æqualium ex eadem altitudine oblique decidentium.

III. *Probl.*

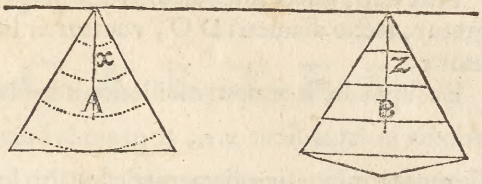
Invenire centrum oſcillationis plani in latus circa axem extra poſitum moti.

Si centri plani ab axe diſtantia vocetur x. tempuſque oſcillationis in planum, ſit ad tempus oſcillationis in latus, ſicut $x. z$: hujus relationis $x^2. z^2: x. \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus deſignabit diſtantiam centri oſcillationis ab axe, ſive longitudinem penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficit, atque pendulum in latus motum; propterea quod longitudines pendulorum ſimplicium ſunt inter ſe, ſicut quadrata temporum oſcillationum.

IV. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis ſolidi.

Si ſolidum A, indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem ſit axis, atque oſcillationis; componaponatur planum b, cujus singulæ lineæ axi parallelæ, sint inter se, sicut singulæ sectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe distant. Distantia centri hujus plani ab axe



vocetur z. distantiaque centri solidi ab eodem axe appelletur x. Tempus oscillationis solidi, est ad tempus oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo sit x. sicut z. x. quandoquidem solidum spectari debet sicut planum in latus motum.

V. *Probl.*

Invenire centrum oscillationis solidi.

Hoc problema perinde solvitur, atque 3. prob. supra.

VI. *Probl.*

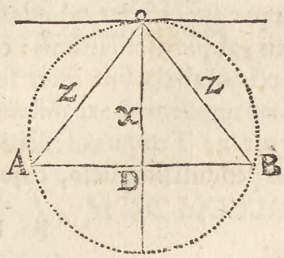
Invenire centrum oscillationis peripheriæ in latus circa tangentem motæ.

Distantia centri oscillationis ab axe, sive longitudo penduli simplicis oscillationes suas eodem tempore conficientis, refertur ad radium, sicut quadratoquadratum diametri ad productum circuli per se ipsum multiplicati; Quandoquidem spatium oscillatione in planum est ad spatium oscillatione in latus decursum, sicut circulus ad quadratum diametri, ut ex infinitorum geometria demonstratur.

VII. *Probl.*

Componere pendulum quod oscillationes suas eodem tempore conficiat, atque pendulum simplex datum.

Longitudo penduli simplicis dati sit diameter peripheriæ, quam axis tangit in puncto O. si hac in peripheria bina puncta A & B a puncto suspensionis æque distantia ad libitum sumantur; hæc duo puncta component pendulum, quod suas oscillationes in latus eodem tempore conficiet, atque pendulum simplex. ad quod probandum.



Hæc

Hæc duo puncta linea diametrum perp. ſecante in puncto D. jungantur, ſectio diametri D O, vocatur x. linea A O ſive B O appelletur z.

Ex ſupra dictis tempus oſcillationis in planum, eſt ad tempus oſcillationis in latus ſicut $x.z$, ac proinde hujus relationis $x^2. z^2 : x. \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus ſive diameter deſignabit longitudinem penduli ſimplicis, quod oſcillationes ſuas eodem tempore conficit, atque pendulum ex iſtis binis punctis compoſitum, in latus motum.

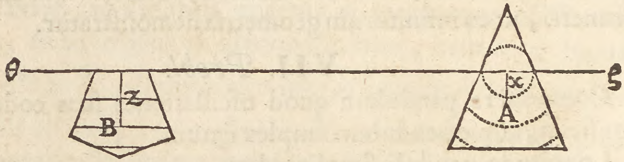
Coroll.

Hinc tibi confeſtim occurrunt infinita pendula compoſita, quæ ſuas quodque oſcillationes eodem tempore conficiunt: verum haud ſcio an obſtupeſcas quod peripheria ſuas oſcillationes breviore tempore perficiat, quam pendulum ſimplex, cujus longitudo eſt ipſa diameter, cum peripheria integra reſolvi poſſit in pendula ſimpliciora componentia, quorum ſingula ſuam quodque oſcillationem eodem tempore ſeorſim conficiant; mirari tamen deſines ſi perſpexeris majorem eſſe gravitatem in peripheria conglutinata, quam in omnibus ipſius partibus disjunctim motis.

VIII. *Probl.*

Invenire durationem oſcillationis cujuſlibet penduli circa axem intra poſitum moti.

Si pendulum A, cujus diſtantia ab axe vocetur x. indefinite dividatur per ſuperficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem ſit axis, atque oſcillationis: componatur planum B, cujus ſingulæ lineæ axi parallelæ ſint inter ſe, ſicut ſingulæ ſectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe diſtant: diſtantiaque centri plani B ab axe appelletur z: Tempus oſcillationis penduli A, erit ad tempus oſcillationis penduli ſimplicis, cujus longitudo ſit x, ſicut $z.x$.



F I N I S.